SIF5003 Matematikk 1, 5. desember 2001

Løsningsforslag

Oppgave 1

For den første grensen får vi et ∞/∞-uttrykk, og bruker L'Hôpitals regel (markert ved $\stackrel{*}{=}$) :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \Bigl(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}\Bigr) = 1.$$

For den andre får vi et $\infty \cdot 0$-uttrykk som vi gjør om til et $0/0$-uttrykk.
Substitusjonen $u = 1/x$ før vi bruker L'Hôpital sparer bare litt arbeid:

$$\lim_{x\to\infty} x\Bigl(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\Bigr) = \lim_{x\to\infty} \frac{\Bigl(1+\dfrac{1}{x}\Bigr)^{1/3} - 1}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{(1+u)^{1/3} - 1}{u} \stackrel{*}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}(1+u)^{-2/3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Oppgave 2

Kaller vi vinkelen i figuren α, vil trapeset få høyde $\sin\alpha$. Den øvre siden får lengde $2\cos\alpha$, og den nedre har lengde 2, så arealet er

$$A(\alpha) = \sin\alpha(1+\cos\alpha), \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

For å finne det største arealet deriverer vi:

$$\frac{dA}{d\alpha} = \cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$$

hvor vi brukte $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Dette gir

$$\frac{dA}{d\alpha} = 0 \iff 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \iff \cos\alpha = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{1+8}) \iff \cos\alpha \in \Bigl\{-1, \frac{1}{2}\Bigr\}.$$

Eneste kritiske punkt i $(0, \pi/2)$ er der hvor $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, eller $\alpha = \pi/3$. For å finne maksimum av funksjonen A over $[0, \pi/2]$ må vi sjekke dette punktet og endepunktene. Men $A(0) = 0$, $A(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, og $A(\pi/2) = 1$. Av disse er $A(\pi/3)$ størst.

Vi ender med tre ekvivalente beskrivelser for det maksimale trapeset: $\alpha = \pi/3$; øvre side er halvparten så lang som nedre side; høyden er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Arealet blir $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Oppgave 3

Integralregningens fundamentalsetning gir oss

$$f'(x) = \sqrt{x^2 e^{2x^2} - 1}.$$

Buelengden blir dermed (bruk substitusjonen $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ i det siste integralet)

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x^2 e^{2x^2}}\,dx = \int_1^2 x e^{x^2}\,dx = \Big[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\Big]_1^2 = \tfrac{1}{2}(e^4 - e).$$

Oppgave 4

a Divergensen av den første rekken vises ved integraltesten, der vi benytter den avtagende funksjonen $f(x) = 1/(x\sqrt{\ln x})$:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{b\to\infty} \Big[2\sqrt{u}\Big]_{\ln 2}^b = \infty.$$

Den andre rekken konvergerer ved testen for alternerende rekker, siden fortegnene alternerer, absoluttverdien av n-te ledd avtar med n (fordi nevneren vokser), og n-te ledd går mot 0 når $n \to \infty$.

Den konvergerer ikke absolutt. Dette kan vises ved grensesammenligning med den første rekken, fordi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+\sqrt{n})\sqrt{\ln n}}}{\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Altså er den andre rekken betinget konvergent.

b Vi kan bruke forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+3}{(n+1)!} x^{2n+2}}{\dfrac{2n+1}{n!} x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)} x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{\Big(2 + \dfrac{1}{n}\Big)(n+1)} x^2 = 0 < 1$$

for alle x, så rekken er (absolutt) konvergent for alle x.

Rekkens sum for $x = 1$ kan finnes på en av (minst) to måter. Den *første* metoden er å sette inn $x = 1$ og dele rekken i to:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{2n+1}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$$

Den siste summen kjenner vi igjen; den har sum e (den er Taylorrekken for e^x med $x = 1$). Den første summen kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2e.$$

Altså er den søkte summen lik $2e + e = 3e$.

Den *andre* metoden går ut på å først finne summen for *alle* x. Vi bruker at potensrekker kan deriveres leddvis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = \frac{d}{dx}\Big(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\Big) = \frac{d}{dx}(xe^{x^2}) = (2x^2+1)e^{x^2},$$

hvor vi så setter inn $x = 1$ og får summen lik $3e$ som før.

Oppgave 5

a En rimelig tolkning av opplysningen om halveringstiden må være $M(7) \approx \frac{1}{2}M(0)$, det vil si $e^{-7k} \approx \frac{1}{2}$. Det gir $k \approx (\ln 2)/7 \approx 0{,}099$.

Vi presenterer her to måter å vise den gitte formelen på. For enkelhets skyld innfører vi $\gamma = e^{-0{,}1}$. Etter ett døgn uten tilførsel av thyroxin har altså stoffmengden i kroppen sunket til γ ganger den opprinnelige verdien.

Den *første* metoden er å se at, om thyroxinmengden i kroppen er M_n etter dagens dose på dag n, etter den γM_n like før dagens dose neste dag. Så gir vi en dose på 0,1, og får dermed

$$(*) \qquad M_{n+1} = 0{,}1 + \gamma M_n.$$

Den oppgitte formelen gir $M_1 = 0{,}1$, som er rimelig dersom pasienten ikke hadde noe thyroxin i kroppen før behandlingen startet på dag 1.

Anta nå at den oppgitte formelen er riktig for $n = k$, det vil si at

$$M_k = 0{,}1\frac{1-\gamma^k}{1-\gamma}.$$

Anvender vi $(*)$ får vi da

$$M_{k+1} = 0{,}1 + \gamma M_k = 0{,}1 + 0{,}1\,\gamma\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma} = 0{,}1\frac{1-\gamma+\gamma(1-\gamma^n)}{1-\gamma} = 0{,}1\frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma}$$

som er den oppgitte formelen for $n = k+1$. Den oppgitte formelen følger derfor ved induksjon.

Den *andre* metoden går ut på å legge merke til at etter dagens dose på dag n skriver thyroxinmengden i kroppen seg fra n forskjellige doser: Hele dagens dose (0,1), det som er igjen av gårsdagens dose $(0{,}1\,\gamma)$, og så videre. Det som er igjen fra dosen gitt for j dager siden er $0{,}1\,\gamma^j$, og dermed blir

$$M_n = \sum_{j=0}^{n-1} 0{,}1\,\gamma^j = 0{,}1\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma}$$

ved den vanlige formelen for en endelig sum av en geometrisk rekke.

b Siden $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ blir

$$\lim_{n\to\infty} 0{,}1\frac{1-e^{-0{,}1\,n}}{1-e^{-0{,}1}} = \frac{0{,}1}{1-e^{-0{,}1}}.$$

Denne verdien kaller vi altså M_*. Vi finner

$$\begin{aligned} M_n > 0{,}95\,M_* &\iff 1-e^{-0{,}1\,n} > 0{,}95 \iff e^{-0{,}1\,n} < 0,05 \\ &\iff e^{0{,}1\,n} > 20 \iff n > 10\ln 20 \approx 29{,}96. \end{aligned}$$

Først på dag 30, altså 29 dager etter at behandlingen startet, vil altså medisinmengden overstige 95% av grenseverdien.

Oppgave 6

a Ligningen er separabel, og standard løsningsmetode gir

$$\int \frac{1+y}{y}\,dy = -\int dt.$$

Integrasjon av dette gir umiddelbart

$$y + \ln y = C - t$$

som påstått i oppgaven. (Ligningen har også den konstante løsningen $y = 0$, men den interesserer oss ikke siden $y > 0$ var gitt.)

Initialbetingelsen $y(0) = 1$ kan settes inn i løsningen ($y = 1$, $t = 0$) og gir oss $1 = C - 0$, så $C = 1$, og vi har derfor

$$(*) \qquad y + \ln y = 1 - t.$$

Setter vi så inn $y = 0{,}3$ får vi

$$t = 1 - 0{,}3 - \ln 0{,}3 \approx 1{,}9040.$$

b Å bestemme $y(2)$ er det samme som å løse $(*)$ med hensyn på y der $t = 2$. Vi skal altså finne et nullpunkt for funksjonen

$$f(y) = 1 + y + \ln y.$$

Newton-iterasjon for ligningen $f(y) = 0$ er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = y_n - \frac{1 + y_n + \ln y_n}{1 + \dfrac{1}{y_n}} = -\frac{y_n \ln y_n}{y_n + 1}.$$

En iterasjon med startverdien $y_0 = 0{,}3$ gir oss

$$y_1 = -\frac{0{,}3 \ln 0{,}3}{1{,}3} \approx 0{,}2778.$$

Oppgave 7

Figuren viser at konkoiden skjærer seg selv i origo, altså der $r = 0$. Setter vi $r = 0$ og løser, får vi $\sin\theta = \frac{1}{2}$, som har to løsninger med $0 < \theta < \pi$, nemlig $\theta = \frac{1}{6}\pi$ og $\theta = \frac{5}{6}\pi$. (For θ utenfor $[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi]$ blir $r < 0$. Disse θ-verdiene gir de to ubegrensede kurvedelene på undersiden av x-aksen.) Utregningen blir litt enklere om vi utnytter symmetrien: $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ gir at kurven er symmetrisk om y-aksen. Vi kan nøye oss med å regne ut arealet av den høyre halvdelen og gange med 2. Arealet blir da

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Bigl(2 - \frac{1}{\sin\theta}\Bigr)^2 d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Bigl(4 - \frac{4}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\Bigr)\,d\theta.$$

Det ubestemte integralet av den første og siste termen kan vel regnes som kjent, mens den midterste kan integreres slik (med substitusjonen $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\,d\theta$):

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\int \Bigl(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Bigr)\,du = \frac{1}{2}\ln\Bigl|\frac{u-1}{u+1}\Bigr| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}A &= \Bigl[4\theta - 2\ln\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \cot\theta\Bigr]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi + 2\ln\frac{1-\cos\frac{1}{6}\pi}{1+\cos\frac{1}{6}\pi} + \cot(\tfrac{1}{6}\pi) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} + 4\ln\bigl(2-\sqrt{3}\bigr) = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} - 4\ln\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)\end{aligned}$$

(Det er mange måter å uttrykke svaret på.)

Hadde vi slått opp i Rottmann ville vi ha funnet

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\tan\frac{\theta}{2} + C$$

som ville gitt

$$A = \Bigl[4\theta - 4\ln\tan\frac{\theta}{2} - \cot x\Bigr]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi + 4\ln\tan\tfrac{1}{12}\pi + \sqrt{3}.$$

Fra den trigonometriske identiteten

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

får vi $\tan\frac{1}{12}\pi = 2 - \sqrt{3}$.

(Men til eksamen gir vi full score uten noen av disse siste forenklingene.)