SIF5003 Matematikk 1
eksamen 2002–07–30

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 10 punkter, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ For $n \geq 1$ er $n^{3/2} + 1 > n^{3/2}$ og derfor $1/(n^{3/2}+1) < 1/n^{3/2}$. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$ er en konvergent rekke (p-rekke med $p = \frac{3}{2} > 1$), og den opprinnelige rekken er derfor konvergent ved sammenligningstesten. [Grensesammenligningstesten kunne også vært brukt.]

$\boxed{2}$ For $n = 1$ har produktet på venstresiden bare ett ledd, og den søkte ulikheten blir $2 \geq 2$, som åpenbart er riktig.

Anta at ulikheten holder for $n = k \geq 1$. Vi starter med venstresiden når $n = k+1$:

$$\underbrace{\Big(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)}_{\geq k+1}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) \geq (k+1)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big)$$
$$= k+1+\sqrt{k+1} > k+2,$$

fordi $\sqrt{k+1} > 1$. Ulikheten holder altså også for $n = k+1$, og den holder derfor for alle heltall $n \geq 1$. [I tillegg har vi vist at ulikheten holder strengt for $n > 1$.]

$\boxed{3}$ Hvis rakettens høyde (målt i meter) er $h = h(t)$, er $\tan\alpha = h/100$. Derivasjon gir

$$\frac{\alpha'}{\cos^2\alpha} = \frac{h'}{100},$$

når α måles i radianer. Vi setter inn $\alpha = 45°$, som gir $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Videre blir $\alpha' = 5°/\text{s} = \frac{5}{180}\pi$ rad/s, så vi ender med $h' = \frac{100}{1/2}\cdot\frac{5}{180}\pi = \frac{50}{9}\pi \approx 17{,}45$ meter per sekund.

$\boxed{4}$ På grunn av symmetrien vil rektanglet med maksimalt areal ha alle sine hjørner på superellipsen. Om vi lar (x, y) betegne hjørnet i første kvadrant, blir de andre hjørnene $(\pm x, \pm y)$ og rektanglets areal blir $4xy$.

Oppgaven går altså ut på å finne den maksimale verdien til $4xy$ når $x \geq 0$, $y \geq 0$ og den gitte ligningen holder. Vi kan løse ligningen med hensyn på y:

$$y = 3\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4}$$

så oppgaven er å finne den maksimale verdien til

$$f(x) = 12x\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4}, \qquad 0 \leq x \leq 5.$$

Funksjonen er positiv i det indre av intervallet $[0,5]$ og null i endepunktene, og den er kontinuerlig i hele intervallet – så den må oppnå sitt maksimum i det indre av intervallet. Vi finner maksimumspunktet ved derivasjon:

$$f'(x) = 12\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{1/4} - \frac{12}{5}x\Big(\frac{x}{5}\Big)^3\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{-3/4}$$
$$= 12\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)^{-3/4}\bigg(1-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4-\Big(\frac{x}{5}\Big)^4\bigg)$$

så

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2^{1/4}}.$$

Dette gir da den maksimale verdien:

$$f\left(\frac{5}{2^{1/4}}\right) = 12 \cdot \frac{5}{2^{1/4}} \cdot \frac{1}{2^{1/4}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \approx 42{,}4.$$

Alternativ, superelegant løsning: Betrakt ulikheten

$$0 \le \left(\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^4 + \left(\frac{y}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{5}\right)^2\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{xy}{15}\right)^2$$

som gir oss

$$xy \le \frac{15}{\sqrt{2}}.$$

Men ulikheten blir en likhet når $x/5 = y/3$, og da har xy sin største verdi, $15/\sqrt{2}$. Arealet $4xy$ blir dermed maksimalt $60/\sqrt{2}$.

$\boxed{5}$ **a)** Oppdeling av intervallet $[0, 1]$ i fire delintervall gir fem delepunkter inklusive endepunktene. Vi beregner integranden i disse punktene:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\cos(x_i^2)$	1,0000	0,9980	0,9689	0,8459	0,5403

Trapesmetoden gir oss tilnærmingen

$$T_4 = \frac{1}{2 \cdot 4}\bigl(\cos(x_0^2) + 2\cos(x_1^2) + 2\cos(x_2^2) + 2\cos(x_3^2) + \cos(x_4^2)\bigr) \approx 0{,}8957.$$

For å estimere feilen trenger vi en øvre grense M_2 for $|f''(x)|$. To gangers derivasjon gir $f''(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$. For $0 \le x \le 1$ er $-6 \le f''(x) \le 0$ [fordi x^2, $\sin(x^2)$ og $\cos(x^2)$ alle ligger mellom 0 og 1], så $|f''(x)| \le 6$. Med $M_2 = 6$ blir feilestimatet

$$|E_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{6(1-0)^3}{12n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

For å garantere $|E_n| < 10^{-5}$ må vi ha $2n^2 > 10^5$, som gir $n > 100\sqrt{5} \approx 223{,}6$. Velger vi $n = 224$ skulle vi således være garantert tilstrekkelig nøyaktighet.

Vi kunne funnet en mindre verdi for M_2 ved faktisk å bestemme maksimumsverdien for $|f''(x)|$ over integrasjonsintervallet, men det er ikke mye å vinne på det. Vi klarer neppe å bestemme denne verdien analytisk, men en graf overbeviser i det minste om at vi kunne satt $M_2 = 4$, eller enda litt lavere. $M_2 = 4$ i regnestykket over ville gitt $n = 183$ delintervaller.

$M_2 = 4$ og $n = 4$ gir for øvrig $E_4 \le \frac{1}{48}$, så vi kunne godt nøyd oss med to desimaler i beregningen av T_4. Men oppgaven spurte ikke etter *dette* feilestimatet.

b) Vi finner Maclaurinrekken til $\cos(x^2)$ ved å bytte ut x med x^2 i Maclaurinrekken til $\cos x$:

$$\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x^2)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{4k}.$$

c) Maclaurinrekken vi fant over konvergerer for alle x. Vi kan derfor integrere leddvis:

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^1 x^{4k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}.$$

Dette er en alternerende rekke, og leddene avtar i absoluttverdi. Feilen har derfor samme fortegn som, og mindre absoluttverdi enn, det første utelatte leddet i en delsum. Vi stiller opp en tabell:

k	0	1	2	3
$\dfrac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}$	1,000	−0,100	0,0046	−0,0001

Et godt nok estimat for summen skulle dermed være summen av de første tre leddene, eller 0,9046. Dette estimatet er for stort, men ikke mer enn ca. 0,0001 for stort.

6 **a)** Vi finner volumet ved skivemetoden:

$$V = \int_1^4 \pi y^2\,dx = \pi \int_1^4 x^6\,dx = \frac{1}{7}\pi\bigl(4^7 - 1^7\bigr) = \frac{16\,383}{7}\pi \approx 7352{,}67.$$

b) Vi tar utgangspunkt i integralet $\int 2\pi y\,ds$. Her blir

$$ds = \sqrt{1 + \Bigl(\frac{dy}{dx}\Bigr)^2}\,dx = \sqrt{1 + \bigl(3x^2\bigr)^2}\,dx = \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$$

og dermed

$$\begin{aligned} A = 2\pi \int_1^4 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,dx &= \frac{2\pi}{36} \int_{10}^{2305} \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{2\pi}{36}\Bigl[\frac{2}{3}u^{2/3}\Bigr]_{10}^{2305} = \frac{\pi}{27}\bigl(2305^{3/2} - 10^{3/2}\bigr) \approx 12\,872{,}66. \end{aligned}$$

Her har vi brukt substitusjonen $u = 1 + 9x^4$, $du = 36x^3\,dx$.

7 Skriver vi om differensialligningen som $xy' = 4 - y^2$ blir det åpenbart at den er separabel. Innfører vi $y' = dy/dx$ og regner formelt videre får vi

$$\int \frac{dy}{4 - y^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

For å integrere venstresiden må vi gjøre en delbrøksoppspaltning. Nevneren på venstresiden har faktoriseringen $4 - y^2 = (2 - y)(2 + y)$. Vi prøver oss med

$$\frac{1}{4 - y^2} = \frac{A}{2 + y} + \frac{B}{2 - y}$$

som etter multiplikasjon med fellesnevneren $4 - y^2$ blir

$$1 = A(2 - y) + B(2 + y) = (B - A)y + 2(A + B).$$

Skal dette holde for alle y må $B - A = 0$ og $2(A + B) = 1$, altså $A = B = \frac{1}{4}$. Vi har altså

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{4 - y^2} &= \frac{1}{4} \int \Bigl(\frac{1}{2 + y} + \frac{1}{2 - y}\Bigr)\,dy = \frac{1}{4}\bigl(\ln|2 + y| - \ln|2 - y|\bigr) + C \\ &= \frac{1}{4} \ln\Bigl|\frac{2 + y}{2 - y}\Bigr| + C = \ln\Bigl|\frac{2 + y}{2 - y}\Bigr|^{1/4} + C. \end{aligned}$$

Alt i alt ender vi med (slår sammen to integrasjonskonstanter til en, og beholder navnet C for denne)

$$\ln \left|\frac{2+y}{2-y}\right|^{1/4} = \ln |x| + C,$$

og dermed

$$\left|\frac{2+y}{2-y}\right|^{1/4} = K_1|x|$$

der $K_1 = e^C$. Vi skriver dette som

$$\frac{2+y}{2-y} = Kx^4$$

med $K = \pm K_1^4$. Dette er et godt sted å bestemme K: Setter vi inn $x = 1$ og $y = 1$ får vi straks $K = 3$. Vi får altså $2 + y = 3x^4(2 - y)$, det vil si $(3x^4 + 1)y = 2(3x^4 - 1)$, og altså

$$y = 2\frac{3x^4 - 1}{3x^4 + 1}\,.$$