**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



*Bokmål*

Faglig kontakt under eksamen:

| | |
|---|---|
| Johan Aarnes | 73 59 17 44 |
| Bjarte Rom | 73 55 02 55 |
| Harald Hanche-Olsen | 73 59 35 25 |
| Runar Ile | 73 55 02 81 |
| Lisa Lorentzen | 73 59 35 48 |


# EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Onsdag 4. desember 2002

Tid: 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning.
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensurdato: 15. januar.

*Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

## Oppgave 1

**a)** Et vannkar dannes ved å rotere kurven

$$y = \tfrac{1}{4}x^3, \qquad x \geq 0$$

om $y$-aksen. Finn volumet av karet opp til høyde $h$.

**b)** Karet fylles med vann. Hvor fort stiger vannhøyden i karet idet høyden er 2 dm og vannet strømmer inn med 10 liter per sekund? (Vi antar $x$ og $y$ er målt i dm.)

**Oppgave 2** En melkekartong der temperaturen i melken var 6 °C, ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen steget til 13 °C. Lufttemperaturen i kjøkkenet var 20 °C. Vi regner med at Newtons avkjølings-/oppvarmingslov gjelder, det vil si at temperaturendringen per tidsenhet i melken er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melken.

**a)** Still opp en differensialligning for temperaturen $T$ i melken som funksjon av tiden $t$, og vis at den har løsning av formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t}$$

der $A$ er lufttemperaturen. Finn konstantene $B$ og $\alpha$.

**b)** Da temperaturen i melken var 15 °C, ble kartongen satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i melken sunket til 12 °C. Hva var temperaturen i kjøleskapet?

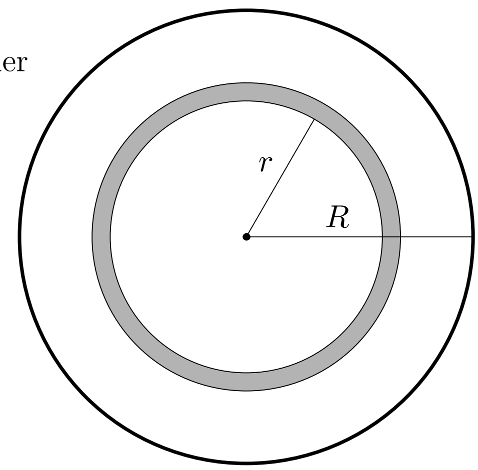
**Oppgave 3**

**a)** Bruk for eksempel rekken $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ (for $|x| < 1$) til å vise at

$$\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}n(2n+1)}.$$

**b)** Bruk formelen over til å finne verdien av integralet med feil mindre enn $10^{-3}$ i absoluttverdi. Begrunn feilestimatet uten å bruke den eksakte verdien av integralet. Løs deretter integralet (det kan lønne seg å starte med en delvis integrasjon).

**Oppgave 4** En sirkulær plate er laget av et materiale der massetettheten (masse per arealenhet) er $\rho(r) = (r+1)^2$ i avstanden $r$ fra sentrum. Finn massen til platen når radien er $R$.



**Oppgave 5**

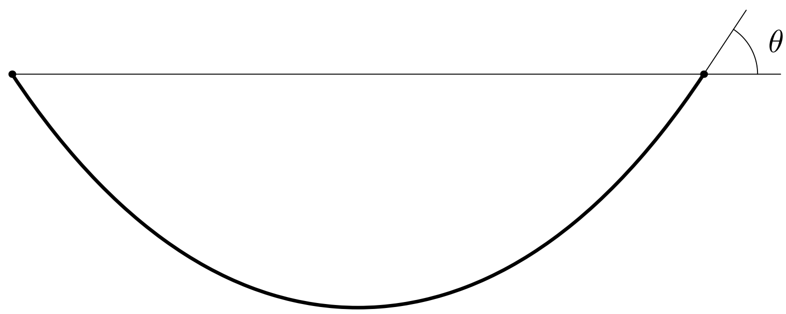
**a)** Bestem buelengden av kurven

$$y = \frac{\cosh ax}{a}, \qquad -1 \le x \le 1$$

hvor $a$ er en positiv konstant.

**b)** Gjør rede for at ligningen $x \tanh x = 1$ har nøyaktig én positiv løsning $x$. Bruk Newtons metode med $x_0 = 1$ til å bestemme denne løsningen med fire desimaler.

**c)** Kurven i **a)** representerer en jevntykk kabel som er opphengt i endepunktene og henger fritt mellom disse.




Strekkraften i kabelen ved opphengspunktet i $x = 1$ er halve tyngden av kabelen dividert med $\sin \theta$, hvor $\theta$ er vinkelen i figuren. Hvilken verdi av $a$ gir minst mulig kraft i opphenget? Hvor langt ned henger midtpunktet i forhold til endepunktene? (Som en omtrentlig kontroll på løsningen kan det opplyses at figuren er tegnet med den optimale verdien av $a$.)