SIF5003 Matematikk 1, 4. desember 2002

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Utregning med skivemetoden gir

$$V = \int_0^h \pi x^2\,dy = \pi \int_0^h (4y)^{2/3}\,dy = \tfrac{3}{5} \cdot 4^{2/3}\pi h^{5/3} = \tfrac{6}{5} \cdot 2^{1/3}\pi h^{5/3}.$$

Alternativt kan sylinderskallmetoden brukes, med

$$V = \int_0^{(4h)^{1/3}} 2\pi x(h-y)\,dx = 2\pi \int_0^{(4h)^{1/3}} x\big(h - \tfrac{1}{4}x^3\big)\,dx$$

som leder til samme svar etter en litt mer infløkt utregning.

b Fra svaret i forrige punkt finner vi $dV/dh = 2 \cdot 2^{1/3}\pi h^{2/3}$ (som vi også kan se direkte fordi tverrsnittsarealet av karet i høyde y er $\pi x^2 = \pi(4y)^{2/3} = 2 \cdot 2^{1/3}\pi y^{2/3}$). For $h = 2$ blir da $dV/dh = 4\pi$, så vi finner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}, \quad \text{altså } 10 = 4\pi\frac{dh}{dt} \quad \text{hvorav } \frac{dh}{dt} = \frac{5}{2\pi} \quad \text{(dm/s)}.$$

Oppgave 2

a Newtons avkjølings/-oppvarmingslov har formen

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(A - T)$$

der konstanten α uttrykker hvor lett varmen ledes inn i eller ut av melken.

Dette er en separabel differensialligning, og standardmetoden gir

$$\int \frac{dT}{A - T} = \alpha \int dt$$

(så lenge $A - T \neq 0$), altså $-\ln|A - T| = \alpha t + C$. Etter multiplikasjon med -1 anvender vi eksponensialfunksjonen og får $|A - T| = e^{-C}e^{-\alpha t}$, det vil si $T - A = \pm e^{-C}e^{-\alpha t}$, som vi endelig skriver $T = A + Be^{-\alpha t}$ der $B = \pm e^{-C}$.

De oppgitte dataene gir oss $T(0) = 6$ og $T(2) = 13$ der $A = 20$. Med andre ord,

$$20 + B = 6 \text{ og } 20 + Be^{-2\alpha} = 13.$$

Den første ligningen gir $B = -14$, og da vil den andre gi $-14e^{-2\alpha} = -7$, altså $\alpha = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

b Situasjonen i kjøleskapet er lik den på kjøkkenbenken (bortsett fra temperaturen), så vi må regne med samme verdi på α, mens vi nå har en ny og ukjent verdi for A (temperaturen i kjøleskapet). Vi har to opplysninger som gir $T(0) = 15$ og $T(1) = 12$. Ellers har løsningen samme form som før, så dette gir de to ligningene

$$A + B = 15 \text{ og } A + Be^{-\alpha} = 12.$$

Men nå er α kjent, og $e^{-\alpha} = 2^{-1/2} = 1/\sqrt{2}$. Den første av ligningene over gir $B = 15 - A$ som vi setter inn i den andre, og får $A + (15 - A)/\sqrt{2} = 12$. Dermed er

$$A = \frac{12 - 15/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 9 - 3\sqrt{2} \approx 4{,}8 \quad (^\circ\mathrm{C}).$$

Oppgave 3

a Den oppgitte rekken med $x = t^2$ kan skrives $\ln(1+t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^{2n}$ når $|t| < 1$. Siden integrasjonsintervallet $[0, \frac{1}{2}]$ ligger innenfor konvergensintervallet for rekken kan vi integrere leddvis, og få

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} (-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{n}\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{n(2n+1)}\Big]_{t=0}^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}n(2n+1)}.\end{aligned}$$

b Rekken er alternerende, absoluttverdien av leddene avtar med n og leddene går mot 0. Dermed er rekken ikke bare konvergent, men vi kan bruke feilestimatet for alternerende rekker, som sier at feilen i n-te delsum har mindre tallverdi (og samme fortegn som) første utelatte ledd. Vi må ha feil $< 10^{-3}$, som krever en nevner større enn 1000. Vi regner ut:

n	1	2	3
$n(2n+1)$	3	10	21
2^{2n+1}	8	32	128
$2^{2n+1}n(2n+1)$	24	320	2688

så vi trenger ikke mer enn to ledd i rekken for å finne summen med ønsket nøyaktighet. Vi har altså

$$\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{320} = \frac{37}{960} \approx 0{,}0385.$$

For å løse integralet eksakt, gjør vi en delvis integrasjon med

$$u = \ln(1+t^2), \quad dv = dt, \qquad du = \frac{2t}{1+t^2}\,dt, \quad v = t$$

og dermed

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} &\ln(1+t^2)\,dt \\ &= \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt \\ &= \tfrac12 \ln\tfrac54 - \int_0^{1/2}\Big(2 - \frac{2}{1+t^2}\Big)\,dt \\ &= \tfrac12 \ln\tfrac54 - \Big[2t - 2\arctan t\Big]_0^{1/2} = \tfrac12\ln\tfrac54 - 1 + 2\arctan\tfrac12.\end{aligned}$$

Oppgave 4

Ringen som er antydet i figuren, med bredde dr, har cirka areal $2\pi r\,dr$ og dermed cirka masse lik $\rho(r)\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi r(r+1)^2\,dr$. Dermed er det bare å integrere opp for å finne massen:

$$m = \int_0^R 2\pi r(r+1)^2\,dr = 2\pi\int_0^R (r^3 + 2r^2 + r)\,dr = \pi(\tfrac12 R^4 + \tfrac43 R^3 + R^2).$$

Oppgave 5

a Derivasjon gir $dy = \sinh ax\,dx$, så

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1+\sinh^2 ax)\,dx^2 = \cosh^2 ax\,dx^2.$$

Sidn $\cosh ax$ alltid er positiv, er $ds = \cosh ax\,dx$, og den søkte lengden er

$$L = \int_{-1}^1 \cosh ax\,dx = \Big[\frac{\sinh ax}{a}\Big]_{-1}^1 = 2\frac{\sinh a}{a}.$$

b Hyperbolsk tangens, tanh, er en voksende funksjon (dens deriverte er $1/\cosh^2 x$), så $x\tanh x$ er en voksende funksjon av x for $x > 0$. Ligningen $x\tanh x = 1$ kan derfor ikke ha mer enn én positiv løsning. På den annen side har den *minst* en løsning, for når $x\to\infty$ vil $\tanh x \to 1$, slik at $x\tanh x\to\infty$, og dermed vil spesielt $x\tanh x > 1$ når x er stor nok. Videre er $x\tanh x = 0$ når $x = 0$, så skjæringssetningen sier at $x\tanh x = 1$ for minst en x.

Setter vi $f(x) = x\tanh x - 1$ blir $f'(x) = \tanh x + x/\cosh^2 x$. Resultatet av Newtons metode kan tabuleres slik:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−0,2384058440	1,181568498	1,201770650
1	1,201770650	0,0025097380	1,199677041	1,199678639
2	1,199678639	−0,0000000015	1,199678640	1,199678640

Vi ser at allerede etter to iterasjoner er hele sju desimaler uforandret, og funksjonsverdien er også blitt svært liten – så burde trygt kunne stole på i hvert fall de fire desimalene oppgaven spurte etter, altså $x \approx 1{,}1997$ (med korrekt avrunding).

c Strekkraften er uttrykt ved $\sin\theta$, men derivasjon gir oss

$$\tan\theta = y'(1) = \sinh a.$$

Første utfordring blir altså å uttrykke $\sin\theta$ ved $\tan\theta$. Det er lettere å gjøre omvendt, og så løse ligningen:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}.$$

Multiplikasjon med kvadratroten og kvadrering gir $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta = \sin^2\theta$, og dermed

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\sinh^2 a}{1+\sinh^2 a} = \frac{\sinh^2 a}{\cosh^2 a} = \tanh^2 a.$$

Siden θ hører hjemme i første kvadrant blir $\sin\theta = \tanh a$. Tyngden av kabelen er proporsjonal med lengden L (kjent fra **a)**), så strekkraften i opphenget er proporsjonal med

$$F(a) = \frac{L}{2\sin\theta} = \frac{L}{2\tanh a} = \frac{\sinh a}{a\tanh a} = \frac{\cosh a}{a}.$$

For å finne når $F(a)$ er minimal deriverer vi og setter den deriverte lik null:

$$F'(a) = \frac{a\sinh a - \cosh a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a\sinh a - \cosh a = 0 \Leftrightarrow a\tanh a = 1.$$

Fra punkt **b)** vet vi at denne ligningen har presis én positiv løsning, $a \approx 1{,}1997$. Denne må gi minimalverdien, fordi $F(a) \to \infty$ dersom $a \to 0$ eller $a \to \infty$. Vertikalavstanden mellom endepunkt og midtpunkt blir $y(1) - y(0) = (\cosh a - 1)/a \approx 0{,}6753$ eller, med andre ord, omtrent 34 % av avstanden mellom opphengene.