Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø tlf. 73 59 35 42
Christian Skau tlf. 73 59 17 55

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Bokmål
Fredag 1. august 2003
Tid: 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning.
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensurdato: 1. september.

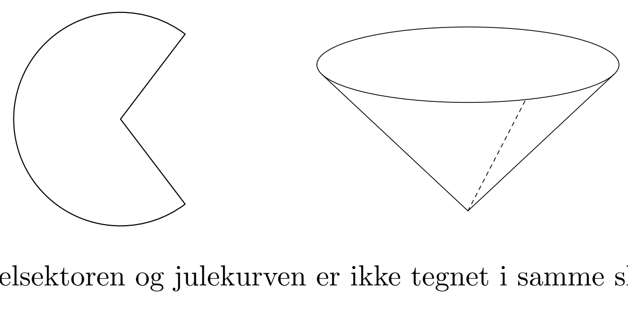
Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn maksimum for

$$f(x) = x\sqrt{100 - x} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 100.$$

b) Lille Even skal lage en julekurv i glanspapir. Han klipper en sektor ut av en sirkelskive med radius 10 cm, og limer den sammen til en kjegle som vist på figuren. Hvor stort volum kan denne julekurven maksimalt ha? Hvilke mål har kurven med maksimalt volum? (Du vil kanskje legge merke til at den resulterende julekurven nok vil fungere dårlig i praksis, noe som bare viser at optimalt design ikke alltid er det beste.)



(Sirkelsektoren og julekurven er ikke tegnet i samme skala.)

Oppgave 2 En logaritmisk spiral er kurven gitt i polarkoordinater ved

$$r = e^{\theta} \qquad \text{for } -\infty < \theta < \infty.$$

a) Finn arealet av området avgrenset av x-aksen og kurven $r = e^{\theta}$ for $0 \le \theta \le \pi$.
Finn buelengden av kurven $r = e^{\theta}$ for $-\pi \le \theta \le 0$.

b) La L_k være buelengden til kurven

$$r = e^{\theta} \qquad \text{for } -(k+1)\pi \le \theta \le -k\pi.$$

Finn summen til rekken

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k.$$

Oppgave 3

La $y = f(t)$ være løsningen av differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = t^2 e^{y^2}$$

med initialbetingelsen $f(0) = 1$. (Hint: Ikke forsøk å løse differensialligningen.)

a) Bestem $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{y-1}{t^3}$.

b) Finn et tredjegradspolynom $P(t)$ slik at

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P''(0) = f''(0) \quad \text{og} \quad P'''(0) = f'''(0).$$

Oppgave 4 La $f(x) = \sin x - x^3$.

a) Vis at $f(x)$ har akkurat ett nullpunkt for $x > 0$.

b) Finn Taylorpolynomet $P_3(x)$ av orden 3 om $x = 0$ til $f(x)$. Bruk $P_3(x)$ til å finne en tilnærming til det positive nullpunktet til $f(x)$.

Oppgave 5 Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer.

$$(i) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Oppgave 6 La $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ for $x > 0$. Finn en tilnærmet verdi for integralet

$$I = \int_1^3 f(x)\,dx$$

ved å bruke trapesmetoden med fire delintervaller. Hvor mange delintervaller er tilstrekkelig for at trapesmetoden gir et svar med feil mindre enn 10^{-3} i absoluttverdi? (Du kan uten bevis bruke at $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}$ for $x \geq 1$.)