SIF5003 Matematikk 1, 1. august 2003

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Vi finner

$$f'(x) = \sqrt{100-x} - \frac{x}{2\sqrt{100-x}} = \frac{100-\frac{3}{2}x}{\sqrt{100-x}}$$

så eneste kritiske punkter i det indre av intervallet $(0,100)$ er der hvor $f'(x)=0$, altså $x = 200/3$. I endepunktene finner vi $f(0) = f(100) = 0$, så maksimum er

$$f\Big(\frac{200}{3}\Big) = \frac{2000}{3\sqrt{3}}.$$

b Julekurven blir en kjegle der sidekanten, fra kjeglespissen til randen, har lengde $R = 10\,\text{cm}$. Om høyden er h og radien i grunnflaten er r blir $r^2 + h^2 = R^2$, så volumet er

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2} = \tfrac{1}{3}\pi\, f(r^2).$$

Det maksimale volumet blir da

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi f\Big(\frac{200}{3}\Big) = \frac{2000}{9\sqrt{3}}\pi \approx 403\,\text{cm}^3.$$

Målene på kurven blir

$$r = \sqrt{\tfrac{200}{3}} = 10\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\text{cm} \quad \text{og} \quad h = \sqrt{R^2-r^2} = \sqrt{100-\tfrac{200}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\,\text{cm}.$$

Oppgave 2

a Det søkte arealet blir

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi e^{2\theta}\,d\theta = \tfrac{1}{4}\Big[e^{2\pi}\Big]_0^\pi = \tfrac{1}{4}(e^{2\pi}-1).$$

For buelengden finner vi

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \left(\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\right)d\theta^2 = 2e^{2\theta}\,d\theta^2,$$

så (om vi bruker notasjonen fra neste punkt)

$$L_0 = \sqrt{2}\int_{-\pi}^0 e^\theta\,d\theta = \sqrt{2}(1-e^{-\pi}).$$

b Samme utregning som over gir

$$L_k = \sqrt{2}\int_{-(k+1)\pi}^{k\pi} e^\theta\,d\theta = \sqrt{2}\Big[e^\theta\Big]_{-(k+1)\pi}^{k\pi} = \sqrt{2}(1-e^{-\pi})e^{-k\pi}.$$

Dermed får vi en geometrisk rekke:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k = \sqrt{2}(1-e^{-\pi})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi} = \sqrt{2}.$$

Oppgave 3

a Her får vi et 0/0-uttrykk, så vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{t\to 0}\frac{y-1}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2e^{y^2}}{3t^2} = \frac{e^{f(0)^2}}{3} = \frac{e}{3}.$$

b Vi har:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(t) &= \frac{dy}{dt} = t^2\,e^{y^2} = t^2\,e^{f(t)^2}\\
&\qquad \text{slik at } f'(0) = 0,\\
f''(t) &= (f'(t))' = 2te^{f(t)^2} + t^2e^{f(t)^2}\cdot 2f(t)\cdot f'(t) = 2te^{f(t)^2}(1+tf(t)f'(t))\\
&\qquad \text{slik at } f''(0) = 0,\\
f'''(t) &= (f''(t))' = 2e^{f(t)^2}(1+tf(t)f'(t)) + 2t\{\dots\}\\
&\qquad \text{slik at } f'''(0) = 2e^0(1+0)+0 = 2e.
\end{aligned}$$

$P(t)$ er per definisjon Taylorpolynomet av 3. grad til f om $t=0$. Det vil si

$$P(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 = 1 + \frac{e}{3}\,t^3.$$

Oppgave 4

a Vi har $f(0)=0$ og $f'(x)=\cos x - 3x^2$, så $f'(0)=1>0$. Dermed er f voksende for små x, og $f(a)>0$ for en (liten) positiv a. Videre er $f(1)=\sin 1 - 1 < 0$. Ved skjæringssetningen har f minst ett nullpunkt mellom $a$og 1.

Videre er $f''(x) = -\sin x - 6x < 0$ for $x>0$ (for $0<x<\pi$ er $\sin x > 0$, og for $x > 1/6$ er $6x > 1 \geq -\sin x$). Så f er konkav for $x>0$. f vokser til sitt maksimum for $x>0$, og avtar deretter strengt, så det kan ikke finnes mer enn ett positivt nullpunkt.

b Vi deriverte f to ganger ovenfor. En gang til gir $f'''(x) = -\cos x - 6$. Vi finner

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \tfrac{7}{6}x^3.$$

Dersom vi antar at $P_3(x)$ er en god tilnærming til $f(x)$ nær nullpunktet til x, kan vi tilnærme nullpunktet til f ved å sette $P_3(x) = 0$, som gir $x = \sqrt{6/7} \approx 0{,}926$. (I virkeligheten ligger nullpunktet i nærheten av 0,92863.)

Oppgave 5

For rekken i (i) kan vi bruke integraltesten, siden funksjonen $f(x) = 1/(x \ln x)$ er positiv og avtagende for $x > 1$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \Big[\ln \ln x\Big]_2^\infty = \infty,$$

så rekken i (i) er *divergent*.

Rekken i (ii) er alterende, siden $\sin x > 0$ for $(n-1)\pi < x < n\pi$ når n er odde, $\sin x < 0$ når n er like.

Leddene a_n i rekken har også avtagende absoluttverdi, siden $\sin x$ er periodisk mens x øker.

Endelig er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, siden

$$|a_n| < \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{(n-1)} \to 0.$$

Ved testen for alternerende rekker er rekken i (ii) *konvergent.* (Den er faktisk betinget konvergent, siden $|a_n| > \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|/(n\pi)\,dx = 2/(n\pi)$.)

Oppgave 6

Trapesmetoden med fire delintervaller gir

$$I \approx T_4 = \frac{3-1}{2\cdot 4}\big(f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + 2f(2) + 2f(\tfrac{5}{2}) + f(3)\big) \approx 1{,}882.$$

Her har vi regnet med tre desimaler (ikke helt urimelig når vi betrakter feilestimatet nedenfor med $n = 4$), og brukt verdiene

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	0,785	0,886	0,955	1,007	1,047

Feilestimatet for trapesmetoden på $[1,3]$ med $M = \frac{1}{4}$ er

$$|I - T_n] \le \frac{(1/4)2^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Vi søker en n slik at

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1000}{6} \Leftrightarrow n > 10\sqrt{5/3} \approx 12{,}9,$$

så $n = 13$ delintervaller er tilstrekkelig.