**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen 73 59 35 48
Kristian Seip 73 59 35 16
Ivar Amdal 73 59 34 68

# EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål
Onsdag 10. desember 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12. januar

*Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1**
Bestem grenseverdiene

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \quad \text{og} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right).$$

**Oppgave 2**
Løs initialverdiproblemet

$$y' = -2x(y-1), \quad y(0) = 2.$$

**Oppgave 3**
Finn ligningen til tangenten i punktet $(1,1)$ til kurven

$$x^2y + xy^3 = 2.$$

**Oppgave 4**
Bestem arealet til rotasjonsflaten som fremkommer når kurven

$$y = \cosh x, \quad 0 \le x \le \ln 2,$$

dreies om linjen $x = -1$.

**Oppgave 5**
Funksjonen $F$ er definert ved

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sin t}\, dt.$$

Finn Taylorpolynomet av grad 2 for $F$ om punktet $x = 0$.

**Oppgave 6**

**a)** Finn konvergensradien til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

**b)** La $S$ betegne summen av rekken i punkt **a)** når $x = -1/2$. Finn en tilnærmet verdi $L$ for $S$ slik at $|S - L| < 0.001$. Begrunn at den ønskede nøyaktigheten er oppnådd.

**Oppgave 7**

**a)** Begrunn at ligningen

$$(*) \qquad e^x - x - 2 = 0$$

har nøyaktig to løsninger.

**b)** Forklar hvorfor $x_0 = 0$ er uegnet som startverdi dersom $(*)$ skal løses ved hjelp av Newtons metode. Bruk så Newtons metode til å finne den største av de to løsningene av $(*)$ med to desimaler.

**Oppgave 8**
Et legeme har grunnflate i $xy$-planet. Grunnflatens omkrets er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, og alle tverrsnitt gjennom legemet vinkelrett på $x$-aksen er likesidede trekanter.

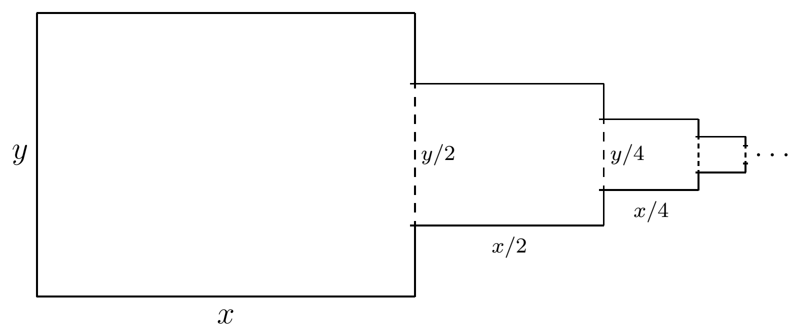
Finn volumet av legemet.

**Oppgave 9**

En innsjø har et volum på $8 \cdot 10^9$ m$^3$. Anta konsentrasjonen av et forurensende stoff er 2.5 kg/m$^3$ ved tidspunktet $t = 0$. En elv tilfører innsjøen vann som inneholder 0.5 kg/m$^3$ av det forurensende stoffet. Vannet fra elven strømmer med konstant hastighet $5 \cdot 10^8$ m$^3$ pr. dag inn i innsjøen. En annen elv fjerner hver dag $5 \cdot 10^8$ m$^3$ vann fra innsjøen. Vi antar at vannet i innsjøen til enhver tid er perfekt blandet. Når vil konsentrasjonen av det forurensende stoffet i innsjøen være redusert til 1 kg/m$^3$?

**Oppgave 10**

Med utgangspunkt i et rektangel med sidekanter $x$ og $y$ lages et område som antydet i nedenstående figur.




Det vil si at en uendelig sekvens av rektangler "hektes" på hverandre, slik at vi ved hver "påhekting" halverer sidekantene i foregående rektangel.

Omkretsen av området skal være 6. Hva må $x$ og $y$ være for at området skal ha maksimalt areal?