Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag tlf. 73 59 35 21

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Mandag 2. august 2004
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Bestem grenseverdiene

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \qquad \text{og} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right).$$

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet.

a)
$$y' = \frac{y^2}{x^2+1}, \quad y(0) = 1$$

b)
$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

Oppgave 3 Finn konvergensradien til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

Oppgave 4

a) En kurve K som går gjennom origo har ligning

$$ax + by = \ln(1 + xy)$$

der a og b er gitte positive konstanter.

Finn dy/dx ved implisitt derivasjon og bestem ligningen for tangenten til K i origo.

b) Sett a=1 og $b = 1$. Da er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + xy - y}{x - xy - 1}.$$

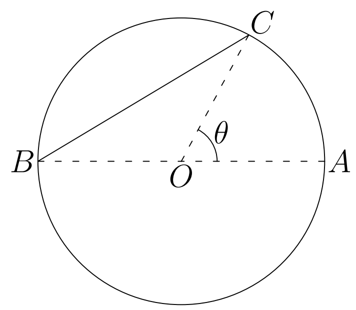
Vis at hvis $dy/dx = 0$ i et punkt (x, y) på K (når $a = b = 1$), så er

$$(*) \qquad x + \frac{1}{1 - x} + \ln(1 - x) = 0.$$

Gjør rede for at ligningen $(*)$ har nøyaktig en løsning.

c) Bruk Newtons metode med startverdi $x_0 = -1$ til å finne løsningen av $(*)$ med to desimaler.

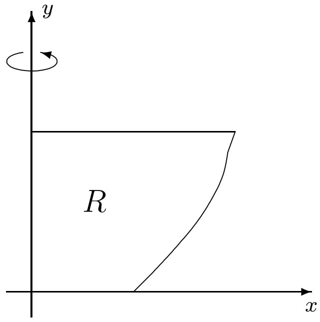
Oppgave 5 En mann står i A på kanten av et sirkulært svømmebasseng med radius 20 m og sentrum i O (se figuren). Han ønsker å komme seg til det diametralt motsatte punktet B på kortest mulig tid. Han kan løpe langs kanten fra A til C og deretter svømme til B. Han kan også løpe hele veien fra A til B, eller svømme direkte fra A til B. La $\theta \in [0, \pi]$ være vinkelen mellom OA og OC.
Hvis mannen løper med en fart av 6 m/s og svømmer med en fart av 3 m/s, for hvilken vinkel θ blir tiden han bruker fra A til B minst mulig?



Vink: Du kan bruke at avstanden fra C til B er $40\cos(\theta/2)$.

Oppgave 6 En stav med lengde 2 m ligger langs x-aksen fra $x = 1$ til $x = 3$. Staven har variabel massetetthet $\delta(x)$ målt i kg/m. Finn stavens masse når massetettheten er gitt ved

$$\delta(x) = \frac{2}{x(4 - x)}.$$



Oppgave 7 Området R på figuren til høyre er begrenset av x-aksen, y-aksen, linjen $y = \pi/2$ og kurven

$$y = \arcsin(x-1).$$

Finn volumet av rotasjonslegemet vi får når R dreies om y-aksen.

Oppgave 8

a) Finn Maclaurinrekken (Taylorrekken om $x = 0$) for funksjonen

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$$

ved å ta utgangspunkt i Maclaurinrekken til e^x. For hvilke x konvergerer rekken for $f(x)$?

b) Når $x = 1/2$ blir rekkeutviklingen i **a)** gitt ved

$$f(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^4} + \frac{1}{5\cdot 2!\,2^7} - \frac{1}{7\cdot 3!\,2^{10}} + \frac{1}{9\cdot 4!\,2^{13}} - \frac{1}{11\cdot 5!\,2^{16}} + - \cdots .$$

Bruk denne rekken til å finne en tilnærmet verdi I for $f(1/2)$. Ta med så mange ledd av rekken at $|f(1/2) - I| < 0.0001$ og begrunn at den ønskede nøyaktigheten er oppnådd.