Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Marius Irgens	tlf. 73550228
Dag Olav Kjellemo	tlf. 73593549
Kristian Seip	tlf. 73593516

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål
Mandag 6. desember 2004
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 6. januar 2005

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet.

a)

$$y' = \frac{y}{1+x^2}, \qquad y(0) = 3.$$

b)

$$2y'' + 5y' - 3y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Oppgave 2 La R betegne området i xy-planet begrenset av $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$.

a) Finn arealet av området R.

b) Bestem tyngdepunktet (sentroiden) til R.

Oppgave 3 Ligningen

$$x^5y + 2xy^3 = 3$$

definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ for $x > 0$ med $f(1) = 1$. Finn Taylor-polynomet til f av grad 2 om $x = 1$.

Oppgave 4 Finn konvergensradien til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\ln(n+1)},$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

Oppgave 5

a) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^1 e^{x^3/3} dx.$$

b) La $f(x) = e^{x^3/3}$ være integranden i punkt a). Vis at $|f''(x)| \leq 3e^{1/3}$ når $0 \leq x \leq 1$, og bruk dette til å vurdere feilen ved tilnærmingen i punkt a). Hvor mange delintervaller ville du bruke for å være sikker på at feilen ble mindre enn 10^{-4}?

Oppgave 6

a) Vis ved induksjon at for $n = 1, 2, 3, ...$ gjelder

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

b) Bruk resultatet i punkt a) til å vise at

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln 2.$$

(Hint: Husk ideen bak integraltesten.)