Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1 6. desember 2004
Løsning

Oppgave 1

a) Ligningen er separabel og løses på vanlig måte:

$$\ln|y| = \arctan x + C \Longleftrightarrow y = Ke^{\arctan x},$$

hvor C og K er vilkårlige konstanter med $|K| = e^C$. Initialbetingelsen $y(0) = 3$ gir $K = 3$ og dermed $\underline{\underline{y = 3e^{\arctan x}}}$.

b) Den karakteristiske ligningen er

$$2r^2 + 5r - 3 = 0,$$

som har løsninger $r_1 = -3$ og $r_2 = 1/2$. Den generelle løsningen av ligningen blir derfor

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x/2}.$$

Initialbetingelsene gir ligningssystemet $C_1 + C_2 = 1$ og $-3C_1 + (1/2)C_2 = 0$, som har løsning $C_1 = 1/7$, $C_2 = 6/7$. Dermed får vi $\underline{\underline{y = (e^{-3x} + 6e^{x/2})/7}}$.

Oppgave 2

a) Arealet betegnes A. De to kurvene skjærer hverandre i $(0,0)$ og $(1,1)$. Vi får dermed

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = 2/3 - 1/3 = \underline{\underline{1/3}}.$$

b) Området er symmetrisk om $y = x$ fordi $\sqrt{x}$ er den omvendte funksjonen til x^2. Dermed får vi at $\overline{x} = \overline{y}$. Vi beregner momentet om y-aksen

$$M_{x=0} = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = 2/5 - 1/4 = 3/20$$

og får $\overline{x} = (3/20)/(1/3) = 9/20$. Tyngdepunktet er altså $\underline{\underline{(9/20, 9/20)}}$.

Oppgave 3 Vi deriverer ligningen implisitt:

$$5x^4y + x^5y' + 2y^3 + 6xy^2y' = 0. \tag{1}$$

Vi deriverer enda en gang og får:

$$20x^3y + 10x^4y' + x^5y'' + 12y^2y' + 12xy(y')^2 + 6xy^2y'' = 0. \tag{2}$$

Vi setter $x = y = 1$ i (1) og får

$$5 + y'(1) + 2 + 6y'(1) = 0,$$

og dermed $f'(1) = y'(1) = -1$. Vi setter så $x = y = 1$ og $y' = -1$ i (2) og får

$$20 - 10 + y''(1) - 12 + 12 + 6y''(1) = 0$$

og dermed $f''(1) = y''(1) = -10/7$. Taylorpolynomet $P_2(x)$ til f om $x = 1$ er derfor

$$\underline{\underline{P_2(x) = 1 - (x-1) - (5/7)(x-1)^2 = (9 + 3x - 5x^2)/7.}}$$

Oppgave 4 Ved forholdstesten er konvergensradien R gitt ved

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \ln(1 + 1/n)/\ln n) = 1.$$

(Grensen kan eventuelt også beregnes ved L'Hôpitals regel.) Når $x = -1$, har rekken positive ledd. Siden $1/\ln(n+1) > 1/(n+1)$ og den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergerer, gir sammenligningstesten divergens når $x = -1$. Når $x = 1$, er rekken alternerende. Siden $\ln x$ er en voksende funksjon som går mot ∞ når x går mot ∞, går absoluttverdien av leddene **monotont** mot 0 når $n \to \infty$. Rekken konvergerer derfor når $x = 1$ ved testen for alternerende rekker. Konvergensintervallet er dermed $\underline{\underline{(-1, 1]}}$.

Oppgave 5

a) Trapesmetoden gir

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{4}(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) \\ &= (0.5 + 1.0052219 + 1.0425469 + 1.1509929 + 0.6978062)/4 \\ &= 1.099142, \end{aligned}$$

med seks desimalers nøyaktighet. Dermed får vi

$$\int_0^1 e^{x^3/3}dx \approx \underline{\underline{1.099}}.$$

b) Vi deriverer $f(x) = e^{x^3/3}$ to ganger og får $f''(x) = (2x + x^4)e^{x^3/3}$. Vi ser at $f''(x)$ er en voksende funksjon, så den har maksimal absoluttverdi i et av endepunktene $x = 0$ eller $x = 1$. Siden $f''(0) = 0$, oppnås maksimum når $x = 1$, og dermed $|f''(x)| \leq 3e^{1/3}$ når $0 \leq x \leq 1$. Feilen E_4 vi gjør kan estimeres slik:

$$|E_4| \leq \frac{3e^{1/3}}{12 \cdot 4^2} = e^{1/3}/64 \approx \underline{0.0218}.$$

Med n delintervaller har vi

$$|E_n| \leq \frac{3e^{1/3}}{12 \cdot n^2} = \frac{e^{1/3}}{4n^2}.$$

For å være sikker på at $|E_n| < 10^{-4}$ velger vi n slik at

$$\frac{e^{1/3}}{4n^2} < 10^{-4},$$

altså $n > 50e^{1/6} \approx 59.07$, dvs. vi kan velge $\underline{\underline{n = 60}}$.

Oppgave 6

a) For $n = 1$ er begge sider lik $1/2$, så utsagnet gjelder for $n = 1$. Vi antar det gjelder for $n = k$, dvs.

$$\sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m}. \tag{3}$$

Vi finner (induksjonshypotesen (3) brukes mellom linje 1 og 2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} \frac{1}{i} &= \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\
&= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\
&= \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.
\end{aligned}$$

Resultatet følger dermed ved induksjon.

b) Sett

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

Siden $1/x$ er en avtagende funksjon, får vi ved arealbetraktninger

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \leq \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x}.$$

Vi beregner de to integralene og får dermed

$$\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \leq \ln 2.$$

Ved resultatet i punkt a) og skviseregel får vi derfor

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2.$$

Siden leddene i rekken går mot 0, vil de odde partialsummene S_{2n+1} også gå mot $\ln 2$. Altså har vi vist at

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln 2.$$