NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
eksamen 16.08.05

Løsningsforslag

1 Grenseverdien er ubestemt av formen "0/0". Gjentatt bruk av L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \underset{\text{L'Hôp.}}{\overset{}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

siden $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$.

Vi kunne også brukt potensrekken for $\sin x$ (Rottmann s. 117):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots\right) = \frac{1}{6}.$$

2 **a)** Den gitte ligningen er separabel og kan (for $y \neq 0$) skrives

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = x^2 - k.$$

Ved integrasjon får vi

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - kx + C.$$

Innsetting av initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = -1$. Løsningen blir altså

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - kx - 1, \qquad \text{dvs.} \qquad y = \frac{-3}{x^3 - 3kx - 3}.$$

b) For $k = -1$ får vi

$$y = \frac{-3}{x^3 + 3x - 3}.$$

Vi søker det største intervallet $(-\infty, a)$ der nevneren $f(x) = x^3 + 3x - 3$ er ulik null. Siden $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, er $f(x)$ strengt voksende. Siden $f(0) = -3 < 0$ og $f(1) = 1 > 0$, må nullpunktet a for $f(x)$ ligge mellom 0 og 1. Vi bruker Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n - 3}{3x_n^2 + 3}$$

med starverdi $x_0 = 0.5$ for å finne en tilnærmet verdi for a:

x_0	0.5
x_1	0.8667
x_2	0.8189
x_3	0.8177
x_4	0.8177

Avrundet til to desimaler er følgelig $a = 0.82$.

3 **a)** Arealet av området R er

$$A = \int_0^2 [f(x) - (-f(x))]\, dx = 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^2$$

ved integralformel 6 b) Rottmann s. 133, eller ved omskriving $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ og substitusjon $u = (x+1)/\sqrt{3}$. Siden $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$ og $\tan\pi/6 = 1/\sqrt{3}$, får vi

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b) Når R dreies om aksen $x = -1$, får vi ved sylinderskallmetoden med radius $r = x+1$:

$$V = \int_0^2 2\pi r[f(x) - (-f(x))]\, dx = 2\pi\int_0^2 \frac{2(x+1)}{x^2+2x+4}\, dx.$$

Vi substituerer $u = x^2+2x+4$, $du = (2x+2)dx$ og får

$$V = 2\pi\int_4^{12} \frac{1}{u}\, du = 2\pi\big[\ln u\big]_4^{12} = 2\pi\big[\ln 12 - \ln 4\big] = 2\pi\ln 3.$$

Av symmetrigrunner er $\overline{y} = 0$. Når R dreies om aksen $x = -1$, vil tyngdepunktet beskrive en sirkel med radius $r = \overline{x}+1$. Av Pappus' første teorem følger

$$V = 2\pi(\overline{x}+1)\cdot A \qquad \text{som gir} \qquad \overline{x} = \frac{V}{2\pi A} - 1 = \frac{3\sqrt{3}\ln 3}{\pi} - 1.$$

4 **a)** Vi skal vise at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på kurven K med ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} - e^y = x^2 y.$$

Setter vi inn $x = 0$ i $(*)$, får vi

$$2 - e^y = 0 \qquad \text{som gir} \qquad e^y = 2, \quad y = \ln 2.$$

Følgelig ligger $(0, \ln 2)$ på K. Ved implisitt derivasjon av $(*)$ med hensyn på x får vi

$$(**) \qquad 4e^{2x} - e^y y' = 2xy + x^2 y'.$$

Vi setter inn $x = 0$, $y = \ln 2$ og får $4 - 2y' = 0$, $y' = 2$. Tangenten til K i $(0, \ln 2)$ har da stigningstall 2 og ligning $y = 2x + \ln 2$.

b) Vi skal finne Taylorpolynomet $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$ for $y = f(x)$ definert ved ligningen $(*)$. Fra **a)** har vi $f(0) = \ln 2$ og $f'(0) = 2$. Implisitt derivasjon av $(**)$ med hensyn på x gir

$$8e^{2x} - \left(e^y\left(y'\right)^2 + e^y y''\right) = \left(2y + 2xy'\right) + \left(2xy' + x^2 y''\right).$$

Vi setter inn $x = 0$, $y = \ln 2$ og $y' = 2$. Det gir $8 - 2\cdot 2^2 - 2y'' = 2\ln 2$ og følgelig $y'' = -\ln 2$. Dermed er $f''(0) = -\ln 2$, og Taylorpolynomet blir:

$$P_2(x) = \ln 2 + 2x - \frac{\ln 2}{2}x^2.$$

5 **a)** Med $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$ fås

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/\sqrt{4(n+1)+1}}{x^n/\sqrt{4n+1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{4n+5}} = |x|.$$

Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer da absolutt når $|x| < 1$ ifølge forholdstesten, og den divergerer når $|x| > 1$ ifølge divergenstesten. Konvergensradien er altså $R = 1$.

For $x = -1$ og $x = 1$ får vi rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Den første konvergerer ifølge alternerende rekkers test ($1/\sqrt{4n+1}$ går monotont mot 0). Den andre kan vi sammenligne med den divergente p-rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{4n+1}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{4n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4+1/n}} = \frac{1}{2}.$$

Siden $L > 0$ følger av grensesammenligningstesten at den gitte rekken er divergent for $x = 1$. Konvergensintervallet er altså $[-1, 1)$

b) Når $x = -1/4$ har vi

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 1 - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4^2\sqrt{9}} - \frac{1}{4^3\sqrt{13}} + \frac{1}{4^4\sqrt{17}} - + \cdots .$$

Rekken er alternerende og leddenes tallverdi avtar mot 0. Siden $4^4\sqrt{17} > 10^3$, setter vi

$$L = 1 - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4^2\sqrt{9}} - \frac{1}{4^3\sqrt{13}} = 0.905$$

(avrundet til 3 desimaler). Da er $|S - L| \le 1/\left(4^4\sqrt{17}\right) = 0.9\cdot 10^{-3}$ ifølge feilskranken i alternerende rekkers test.

6 Vi skal bestemme a slik at summen S av arealene av trekantene OAP og BCP på figuren i oppgaven blir minst mulig. Vi regner først ut koordinatene til P for å finne høyden i de to trekantene.

Linjen gjennom O og $B(1,1)$ har ligning $y = x$, og linjen gjennom $C(0,1)$ og $A(a,0)$ har ligning $y = -x/a + 1$. I skjæringspunktet er

$$x = -\frac{x}{a} + 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{a}\right)x = 1, \qquad x = \frac{a}{a+1} = y.$$

For arealet S får vi

$$S = \Delta OAP + \Delta BCP = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{a+1} + \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{a}{a+1}\right) = \frac{a^2+1}{2(a+1)}, \qquad a > 0.$$

Minimumsverdien for S oppnås i et punkt der $dA/ds = 0$. Her er

$$\frac{dS}{da} = \frac{a^2+2a-1}{2(a+1)^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{dS}{da} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Siden $a > 0$ må vi ha $a = \sqrt{2} - 1$. At det gir $S_{\min}$ følger av at $dS/da < 0$ når $0 < a < \sqrt{2} - 1$ og $dS/da > 0$ når $a > \sqrt{2} - 1$.