



Faglig kontakt under eksamen:

Johan Aarnes tlf. 920 80 614

Kristian Seip tlf. 911 29 136

Ivar Amdal tlf. 995 59 273

## EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål

Onsdag 7. desember 2005

Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning  
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 9. januar

*Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1** En funksjon er definert for  $x \in \mathbb{R}$  ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{\cosh x - 1}{x} & \text{hvis } x \neq 0. \end{cases}$$

Bestem  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x}$ , og avgjør om  $f$  er kontinuert i  $x = 0$ .

**Oppgave 2**

a) Vis at ligningen  $\cosh x - 1 - x = 0$  har nøyaktig én løsning  $x^*$  i intervallet  $(1, 2)$ .

b) Benytt Newtons metode til å beregne  $x^*$  med to desimaler.

**Oppgave 3** Et kvadrat er plassert med en diagonal langs  $x$ -aksen og to hjørner i punktene  $(1, 0)$  og  $(3, 0)$ . Finn volumet av legemet som fremkommer når kvadratet roteres om  $y$ -aksen.

**Oppgave 4** Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

**Oppgave 5** Et vassdrag skal behandles med giften Rotenon fordi en ønsker å bekjempe lakseparasitten *Gyrodactylus Salaris*. Elven som skal behandles, renner ut fra et lite tjern. Giften tilføres tjernet med en konstant rate på  $k$  kg pr. time i tre døgn. Vi antar at like mye vann flyter inn i tjernet som ut, og at tjernet har et konstant vannvolum på  $100\,000 = 10^5$  liter. Vi antar at vi har fullstendig blanding av gift i vannet til enhver tid, og at elven har konstant vannføring på 1000 liter pr. time.

- a) Still opp en differensialligning for mengden  $x(t)$  av Rotenon i tjernet ved tiden  $t$  målt i timer ( $t \in [0, 72]$ ) fra behandlingen startet, og vis at løsningen er gitt ved

$$x(t) = 100k(1 - e^{-t/100}).$$

- b) For at behandlingen skal være virkningsfull må konsentrasjonen av gift i elven overstige 15 gram pr. liter. Hvor stor må tilførselsraten  $k$  være for at dette kan oppnås i løpet av tre døgn?

**Oppgave 6** Beregn

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

**Oppgave 7**

- a) Finn Taylorrekken om  $x = 0$  (Maclaurinrekken) for funksjonen

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

For hvilke  $x$  konvergerer rekken?

Det oppgis at

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots.$$

- b) Beregn integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$$

med en feil som i absoluttverdi er mindre enn  $10^{-4}$ .