Utvidet løsningsforslag
Eksamen i TMA4100 Matematikk 1, 16/12 2008

Oppgave 1 i) Vi gjør substitusjonen $u = \sin\theta$ og får

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \;=\; \int_0^1 u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

En annen løsningsmetode er

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-(-1)-(-1)\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ii) Vi bruker delvis integrasjon med $u(x) = 1 - x$ og $v'(x) = e^x$. Det gir $u'(x) = -1$ og vi kan ta $v(x) = e^x$, og vi får

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x)e^x\, dx &= \left[(1-x)e^x\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-1)e^x\, dx \\ &= \left[(1-x)e^x\right]_{-1}^1 + \left[e^x\right]_{-1}^1 = \left[(1-x)e^x + e^x\right]_{-1}^1 \\ &= (e^1) - (2e^{-1} + e^{-1}) = \underline{e - \frac{3}{e}}\end{aligned}$$

Vi kan også bruke delvis integrasjon for å finne en antiderivert først, så slipper vi å dra med oss grensene hele veien. En alternativ utregning er å skrive $\int_{-1}^1 (1-x)e^x\, dx = \int_{-1}^1 e^x\, dx - \int_{-1}^1 xe^x\, dx$ og bruke delvis integrasjon på det siste integralet.

Oppgave 2 $f(x) = x^3 + 2x - 1$

a) f er en kontinuerlig funksjon på $[0,1]$, $f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = 2 > 0$, så skjæringssetningen sier at det finnes minst et nullpunkt (minst et punkt $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$). $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, så f er strengt voksende. Dermed kan ikke funksjonen ta samme verdi (i dette tilfellet null) to forskjellige steder, så vi kan ha høyst et nullpunkt. Dermed har vi nøyaktig ett nullpunkt.

b) Newtons metode består i å velge et startpunkt, finne tangenten til kurven for dette punktet og finne ut hvor denne tangenten krysser x-aksen. Dette gir et nytt punkt som vi kan gjenta prosessen på. Vi får dermed en følge av punkt $x_0, x_1, x_2, \ldots$ der

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Med $x_0 = 1/2$ får vi

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 + 2x_n - 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 2$	x_{n+1}
0	1/2	1/8	11/4	$10/22 \approx 0{,}4545$
1	5/11	$4/1331 \approx 0{,}003005$	$317/121 \approx 2{,}6198$	$1581/3487 \approx 0{,}4534$

Vi ser at allerede $x_1 \approx 0{,}4545$ og $x_2 \approx 0{,}4534$ har de to første desimalene felles, så vi kan stoppe her og gi $x = 0{,}45$ som en tilnærming til nullpunktet.

Det er selvfølgelig også helt greit å bruke rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 1}{3x_n^2 + 2}$$

og regne ut x_1 og x_2 direkte fra denne.

Oppgave 3 Det mangler 50 liter før tanken er full, det renner lake inn med en hastighet på 3 liter per minutt samtidig som det renner lake ut med en hastighet på 2 liter per minutt. Dermed er tanken full etter 50 minutter.

For å finne mengden salt etter 50 minutter, $s(50)$, løser vi initialverdiproblemet. Først setter vi ligningen på standard form

$$s' + \frac{2}{200+t}s = 600$$

$2\ln(200+t)$ er en antiderivert til $2/(200+t)$, så vi multipliserer hver side av ligningen med $e^{2\ln(200+t)} = (200+t)^2$ og får

$$\begin{aligned}
(200+t)^2 s' + 2(200+t)s &= 600(200+t)^2 \\
((200+t)^2 s)' &= 600(200+t)^2 \\
(200+t)^2 s &= \int 600(200+t)^2\,dt = 200(200+t)^3 + C \\
s &= 200(200+t) + \frac{C}{(200+t)^2}
\end{aligned}$$

Ved tiden $t = 0$ har vi 200 liter med en konsentrasjon på 100 gram salt per liter, totalt 20 000 gram salt. Setter vi dette inn i løsningen vi nettopp fikk får vi

$$\begin{aligned}
s(0) &= 200 \cdot 200 + \frac{C}{200^2} = 20000 \\
C &= -8 \cdot 10^8 \\
s(t) &= 200(200+t) - \frac{8 \cdot 10^8}{(200+t)^2} \\
s(50) &= 400 \cdot 250 - \frac{8 \cdot 10^8}{250^2} = 100(20 \cdot 25 - 8 \cdot 2^4) = 37200
\end{aligned}$$

Det er altså $\underline{\text{37200 gram (37,2 kg) salt i tanken}}$ i det øyeblikket den blir full.

Oppgave 4: a) $f(x) = \ln(1-x)$ så

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-1} \\ f''(x) &= -(1-x)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= -2(1-x)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -2\cdot 3(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

Det kan se ut som $f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}$ for $n \geq 1$. Vi kan vise dette ved induksjon.

Grunnsteget, at påstanden er sann for $n = 1$, er allerede vist.

Induksjonssteget: Anta at påstanden er sann for et tall $n = k$. Vi må vise at denne antagelsen medfører at påstanden i såfall også må være sann for $n = k+1$.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' = (-(k-1)!(1-x)^{-k})' \\ &= -(k-1)!(-k)(1-x)^{-k-1}(-1) \\ &= -((k+1)-1)!(1-x)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

som var det vi måtte vise. (Vi brukte antagelsen i den andre likheten). Dermed sier induksjonsprinsippet at påstanden er sann for alle heltall $n \geq 1$.

Setter vi inn $x = 0$ i $f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}$ får vi

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)! \text{ for } n \geq 1 \text{ og } f(0) = 0.$$

Dermed får vi Taylorrekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}x^n$$

Her er et alternativ der vi slipper induksjon: Vi vet at $-\ln(1-x)$ er en antiderivert til $1/(1-x)$. Vi vet også (geometrisk rekke) at

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dermed får vi

$$\ln(1-x) + C_1 \quad = \quad -\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C_2$$

eller

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

Hvis vi setter inn $x = 0$ i ligningen over ser vi at vi må ha $C = 0$, så

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n$$

b) Hvis vi sammenligner rekken med den geometriske rekken $\sum x^n$ ser vi at rekken hvertfall konvergerer for $-1 < x < 1$. Når $x = 1$ har vi minus den harmoniske rekken $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$, som vi vet divergerer. Dermed kan vi ikke ha en større konvergensradius enn 1. Når $x = -1$ får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ der leddene går mot null og avtar i tallverdi. Dermed sier den alternerende rekketesten at vi har konvergens. Altså konvergerer rekken for $-1 \leq x < 1$ og divergerer for alle andre x.

Alternativt kan vi for eksempel bruke forholdstesten til å teste for absolutt konvergens, og deretter sjekke i endepunktene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{-1}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{-1}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x| = |x|.$$

Dermed vet vi at rekka konvergerer absolutt for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. Endepunktene sjekker vi som vi gjorde over.

Oppgave 5 For x mellom 1 og $e^{\pi/c}$ får vi at $c \ln x$ er mellom 0 og π, så uttrykket inni rottegnet er positivt, så y er veldefinert og positiv. Roter B_c om x-aksen og del rotasjonslegemet opp i skiver med tykkelse Δx som står normalt på x-aksen. Disse skivene vil omtrent være sylinderformede, med radius y og høyde Δx. Volumet av skivene vil dermed være omtrent $\pi y^2 \Delta x$. Legger vi sammen disse omtrentlige verdiene av skivene og tar grensen får vi at volumet V_c til omdreiningslegemet vil være

$$V_c = \int_1^{e^{\pi/c}} \pi y^2 \, dx = \int_1^{e^{\pi/c}} \pi \frac{\ln x}{x} \sin(c \ln x) \, dx$$

Hvis vi gjør subsitusjonen $u = c \ln x$ får vi

$$V_c = \int_0^{\pi} \pi \frac{u}{c^2} \sin u \, du$$

Ved delvis integrasjon får vi

$$\int u \sin u \, du = u(-\cos u) - \int 1 \cdot (-\cos u) \, du = -u \cos u + \sin u$$

så vi får

$$V_c = \left[\frac{\pi}{c^2} (-u \cos u + \sin u) \right]_n^{\pi} = \frac{\pi^2}{c^2}.$$

For at volumet skal bli $\pi^2/2$ må vi dermed ha $\underline{c = \sqrt{2}.}$

Oppgave 6 Vi ser på stokken som er tegnet inn på figuren. Hvis vi lar lengden i gangen være g og lengden i rommet være r får vi

$$\frac{1}{g} = \sin \theta \qquad \text{og} \qquad \frac{8}{r} = \cos \theta$$

Dermed er lengden av den lengste stokken som kan stå med vinkel θ

$$l(\theta) = r(\theta) + g(\theta) = \frac{8}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta}.$$

En stokk som skal bæres inn i rommet må få plass hele veien rundt, så den kan ikke være lenger enn minimumsverdien for $l(\theta)$ for θ mellom 0 og $\pi/2$. For å finne denne verdien deriverer vi l og setter den deriverte lik null:

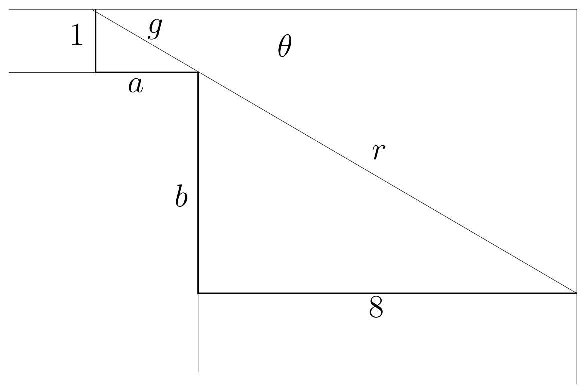
$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\theta} &= -8(-\sin \theta)(cos\theta)^{-2} - \cos \theta (\sin \theta)^{-2} = 0 \\ (\cos \theta)^3 &= 8(\sin \theta)^3 \\ \tan \theta &= 1/2 \end{aligned}$$

Funksjonen $l(\theta)$ er deriverbar på $(0, \pi/2)$ og går mot uendelig i begge endepunktene, så vi har et minimum for vinkelen som gir $\tan \theta = 1/2$. Når $\tan \theta = 1/2$ har vi $\cos \theta = 2/\sqrt{5}$ og $\sin \theta = 1/\sqrt{5}$ (bruk Pytagoras), så vi får at stokken kan maksimalt være

$$\frac{8}{2/\sqrt{5}} + \frac{1}{1/\sqrt{5}} = \underline{5\sqrt{5}}.$$

Vi kan også løse denne oppgaven uten å bruke vinkelen θ. La g og r være som før, mens kortsidene i trekantene er a og b i henholdsvis gangen og rommet (se figuren). Da har vi, fordi trekantene er formlike, at $1/a = b/8$ og Pytagoras gir oss

$$g^2 = 1^2 + a^2 \qquad \text{og} \qquad r^2 = b^2 + 8^2.$$



Den maksimale lengden i en slik posisjon er da ($b = 8/a$)

$$l = g + r = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{b^2+8^2} = \sqrt{1+a^2} + 8\sqrt{1+a^{-2}}.$$

For å finne den posisjonen der det er minst plass til stokken deriverer vi l med hensyn på a og setter denne lik null:

$$\begin{aligned}
l'(a) &= \frac{2a}{2\sqrt{1+a^2}} + 8\frac{-2a^{-3}}{2\sqrt{1+a^{-2}}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + 8\frac{-a \cdot a^{-3}}{\sqrt{a^2}\sqrt{1+a^{-2}}} = \frac{a-8a^{-2}}{\sqrt{1+a^2}} = 0 \\
a - 8a^{-2} &= 0 \\
a^3 - 8 &= 0 \\
a^3 &= 8 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Vi ser at $l'(a) < 0$ for $a \in (0,2)$ og at $l'(a) > 0$ for $a > 2$. Det følget at $l(2)$ er minimumsverdien for $l(a)$ for $a > 0$. Dermed er posisjonen der det er minst plass til en stokk den som svarer til $a = 2$, så stokken kan ha lengde høyst

$$l(2) = \underline{5\sqrt{5}.}$$