Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (73 55 02 28)

KONTINUASJONSEKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Tirsdag 4. august 2009
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 25. august 2009

Hjelpemidler (Kode C): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 For hvilke x konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(7x)^n$?

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(7x)^n$ er en geometrisk rekke, så den er konvergent hvis og bare hvis $|7x| < 1$. Dvs. hvis og bare hvis $-1/7 < x < 1/7$.

Oppgave 2 Finn tredjegrads Taylorpolynomet om $x = 1$ til $f(x) = \ln(x^2)$.

Vi har $f(x) = \ln(x^2)$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, $f''(x) = \frac{-2}{x^2}$ og $f^{(3)}(x) = \frac{4}{x^3}$, så Taylorpolynomet om $x = 1$ til $f(x) = \ln(x^2)$ er $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 = 0 + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$.

Oppgave 3 Vis at punktet $(1, 2)$ ligger på kurven

$$xy^3 - x^3y = 6.$$

Finn deretter likningen for tangenten til kurven i dette punktet.

Hvis $(x, y) = (1, 2)$ da er $xy^3 - x^3y = 2^3 - 2 = 6$, så punktet $(1, 2)$ ligger på kurven $xy^3 - x^3y = 6$. Ved implisitt derivasjon får vi $y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} - 3x^2y - x^3\frac{dy}{dx} = 0$ hvorav følger at $y^3 - 3x^2y = (x^3 - 3xy^2)\frac{dy}{dx}$ og dermed at $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2}$.

Det følger at stigningstallet til tangenten til kurven i punktet $(1, 2)$ er $\frac{2^3-6}{1-12} = \frac{-2}{11}$, og dermed at likningen for tangenten til kurven i dette punktet er $y - 2 = \frac{-2}{11}(x-1)$ eller $y = \frac{-2}{11}x + \frac{24}{11}$.

Oppgave 4 Bestem c slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & x \neq 0, \\ c & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi har $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3$ og at $f(0) = c$, så f er kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $c = 3$.

Oppgave 5 En bil bruker $3,6 + 0,001v^2$ liter bensin per time når den kjører med en hastighet på v kilometer i timen. Ved hvilken hastighet bruker bilen minst bensin per kilometer, og hva er forbruket da?

Vi antar at $v > 0$ (hvis $v = 0$ kjører bilen ikke og det gir derfor ikke mening å snakke om bilens forbruk av bensin per kilometer). Vi har da at bilens forbruk av bensin per kilometer er $f(v) = 3,6v^{-1} + 0,001v$. Vi skal altså finne minimum for dette uttrykket. Vi begynner med å derivere og får $f'(v) = -3,6v^{-2} + 0,001$. Vi har derfor at $f'(v) = 0$ hvis og bare hvis $v = 60$. Vi ser at $f'(v) < 0$ for $0 < v < 60$ og at $f'(v) > 0$ for $v > 60$. Funksjonen $f(v)$ har altså minimum for $v = 60$. Dvs. bilen bruker minst bensin per kilometer når hastigheten er 60 kilometer i timen, og forbruket er da $3,6 + 0,001(60)^2 = 7,2$ liter per time eller $7,2/60 = 0,12$ liter per kilometer.

Oppgave 6 Estimer integralet $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ med en feil mindre enn $0,02$.

Vi benytter trapesmetoden. La $f(x) = \sin(x^2)$. Hvis vi inndeler intervallet $[0, 1]$ i n deler, er feilen ved trapesmetoden mindre enn $\frac{M}{12n^2}$ hvis $M > |f''(x)|$ for alle $x \in [0, 1]$. Vi har at $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ og at $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$. Vi har altså at $|f''(x)| < 6$ for alle $x \in [0, 1]$, så hvis vi deler intervallet $[0, 1]$ i 5 deler er feilen ved trapesmetoden mindre enn $0,02$. Trapesmetoden gir oss da at integralet $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ tilnærmelsesvis, med en feil mindre enn 0,02, er lik $\frac{1}{10}(\sin(0) + 2\sin((1/5)^2) + 2\sin((2/5)^2) + 2\sin((3/5)^2) + 2\sin((4/5)^2) + \sin(1)) = 0,314$.

Oppgave 7 Finn tyngdepunktet til området avgrenset av x-aksen, kurven $y = x\sin(\frac{x}{2})$ og linjene $x = -\pi$ og $x = \pi$.

Tyngdepunktet til området er gitt ved $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M})$ hvor

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{y}\ dm = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x\sin(\frac{x}{2}) x\sin(\frac{x}{2})\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin^2(\frac{x}{2})\ dx = \int_0^{\pi} x^2\sin^2(\frac{x}{2})\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos x)\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} + \pi, \end{aligned}$$

$$M_y = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}\ dm = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(\frac{x}{2})\ dx = 0$$

og

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} dm = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(\frac{x}{2})\ dx = 2\int_0^{\pi} x\sin(\frac{x}{2})\ dx = 2\Big[-2x\cos(\frac{x}{2}) + 4\sin(\frac{x}{2})\Big]_0^{\pi} = 8.$$

Dvs. tyngdepunktet til området er $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}) = (0, \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8})$.

Oppgave 8 Vis at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n}$ er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Vi har at $\left|\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{n!2^n}{x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{2(n+1)} \to 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så det følger av forholdstesten at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n}$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$. Funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n}$ er derfor uendelig mange ganger deriverbar på $\mathbb{R}$. Vi har dessuten at $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} 2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}} x^{2n-1}$ og at $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n}$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed at

$$\begin{aligned} f''(x) + xf'(x) + f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n} + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n} \\ &= -1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n}(2n+1) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(-2n-1+2n+1) \right) x^{2n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da vi også har at $f(0) = 1$ og at $f'(0) = 0$ følger det at funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n} x^{2n}$ er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$