# TMA4100 Matematikk 1
# Eksamen desember 2009

**Løsningsforslag**

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ Vi har at $\lim_{x\to1}(1-\cos(1-x^2)) = \lim_{x\to1}(x^2-2x+1) = \lim_{x\to1}(-2x\sin(1-x^2)) = \lim_{x\to1}(2x-2) = 0$, at $1-\cos(1-x^2)$, $x^2-2x+1$, $-2x\sin(1-x^2)$ og $2x-2$ er deriverbare funksjoner, at $\frac{d}{dx}(1-\cos(1-x^2)) = -2x\sin(1-x^2)$, $\frac{d}{dx}(x^2-2x+1) = 2x-2$, $\frac{d}{dx}(-2x\sin(1-x^2)) = -2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)$ og $\frac{d}{dx}(2x-2) = 2$, og at $\lim_{x\to1}\frac{-2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)}{2} = 2$. Det følger derfor ved 2 anvendelser av L'Hopitals regel at

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(1-x^2)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to1}\frac{-2x\sin(1-x^2)}{2x-2} = \lim_{x\to1}\frac{-2\sin(1-x^2)+4x^2\cos(1-x^2)}{2} = 2.$$

$\boxed{2}$ Vi anvender delbrøkoppspalting: Vi har at

$$\begin{aligned}\frac{x-7}{x^2+x-6} &= \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}\\ &= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{x^2+x-6}\\ &\iff A+B=1 \text{ and } 3A-2B=-7\\ &\iff B=1-A \text{ and } 3A-2(1-A)=-7\\ &\iff B=1-A \text{ and } 5A=-5 \iff A=-1 \text{ and } B=2.\end{aligned}$$

Det følger at

$$\int\frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = 2\int\frac{1}{x+3}\,dx - \int\frac{1}{x-2}\,dx = 2\ln|x+3|-\ln|x-2|+C.$$

Innsetting av grensene gir

$$\int_0^1\frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = [2\ln|x+3|-\ln|x-2|]_0^1 = (2\ln4-\ln1)-(2\ln3-\ln2) = \underline{\underline{2(\ln4-\ln3)+\ln2}}.$$

(Merk også at $\ln4 = \ln(2\cdot2) = \ln2+\ln2$, så svaret kan også skrives som $5\ln2-2\ln3$)

$\boxed{3}$ For hvert naturlig tall $n$ la $a_n = \left|\frac{(x+1)^n}{n2^n}\right|$. Da har vi at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}|x+1| = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x+1| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}|x+1|.$$

Det følger derfor av forholdstesten at potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergerer absolutt for $\frac{1}{2}|x+1|<1$ og ikke konvergerer absolutt for $\frac{1}{2}|x+1|>1$. Følgelig er potensrekken

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergent for $x \in (-3,1)$, og divergent for $x \in (\infty,-3)$ og for $x \in (1,\infty)$.

For $x=-3$ har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er konvergent.

For $x=1$ har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent.

Altså er potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ konvergent for $x \in [-3,1)$ og divergent for alle andre verdier av $x$.

$\boxed{4}$ Funksjonen $f(x) = x^3 - 9x^2 + 33x + 45$ er deriverbar og $f'(x) = 3x^2 - 18x + 33 = 3(x-3)^2 + 6 > 0$ for alle $x$. Følgelig er $f$ en voksende funksjon og har derfor en omvendtfunksjon $g(x)$.

Da $f(-1) = 2$ er $g(2) = -1$. Det følger at

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{54}.$$

$\boxed{5}$ Ifølge Eulers metode er $y(x_n) \approx y_n$ der $x_n$ og $y_n$ er definert rekursivt ved $x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0{,}1$ og $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0{,}1(e^{-y_n} - 1) = y_n + 0{,}1e^{-y_n} - 0{,}1$. Da $y(0) = 1$ la vi $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Da har vi at $x_1 = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$, $y_1 = 1 + 0{,}1e^{-1} - 0{,}1 = \frac{9+e^{-1}}{10}$, $x_2 = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$ og at $y_2 = \frac{9+e^{-1}}{10} + 0{,}1e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}} - 0{,}1 = \frac{8+e^{-1}+e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}}}{10}$.
Altså er

$$y_2 = \frac{8 + e^{-1} + e^{-\frac{9+e^{-1}}{10}}}{10} \approx 0{,}8759764012$$

en tilnærmet verdi for $y(0{,}2)$.

$\boxed{6}$ La $y$ være en løsning til differensiallikningen

$$y' - \cos(x)y = \cos(x). \tag{1}$$

Differensiallikningen (1) er en lineær førsteordens differensiallikningen. Da $\int -\cos(x)\,dx = -\sin(x) + C$ multipliserer vi begge sider av (1) med $e^{-\sin(x)}$. Da får vi at

$$\cos(x)e^{-\sin(x)} = y'e^{-\sin(x)} - y\cos(x)e^{-\sin(x)} = \frac{d}{dx}\left(ye^{-\sin(x)}\right).$$

Følgelig er

$$ye^{-\sin(x)} = \int \cos(x)e^{-\sin(x)}\,dx = -e^{-\sin(x)} + C$$

og $y = -1 + Ce^{\sin(x)}$ der $C$ er en konstant. Hvis $y(0) = 0$ er $0 = -1 + Ce^0 = -1 + C$. Dvs. $C = 1$. Altså er $y = e^{\sin(x)} - 1$ en løsning til initialverdiproblemet

$$y' - \cos(x)y = \cos(x), \quad y(0) = 0.$$

$\boxed{7}$ **a)** La $V$ være volumet av vann i reservoaret når vannstanden i reservoaret er $h$. Vannets overflate er en sirkel med radius $\frac{5}{2}h$. Vi har derfor at

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}h\right)^2 h = \frac{25\pi}{12}h^3.$$

Ved implisitt derivasjon får vi at

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

Følgelig er

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\frac{dV}{dt}}{25\pi h^2} = \frac{8}{25\pi h^2}.$$

Dvs. at vannstaden i reservoaret synker med $\frac{8}{25\pi 8^2} = \frac{1}{200\pi}$ meter pr. minutt i det øyeblikket vannstanden er 8 meter.

**b)** Hvis vi deler vannreservoaret i infinitesimal små horisontale lag hver med dybde $dy$ meter så vil volumet av det laget som ligger $h$ meter over bunnen av vannreservoaret være lik $\pi(\frac{5}{2}h)^2dh$ kubikkmeter og det vil derfor kreves $9810(11 - h)\pi(\frac{5}{2}h)^2dh = 9810\frac{25\pi}{4}(11-h)h^2dh$ Joule av pumpe det laget opp i en høyde 1 meter over vannreservoarets overflate. Følgelig vil det kreves

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} 9810\frac{25\pi}{4}(11-h)h^2\,dh &= \frac{122625\pi}{2}\int_0^{10} 11h^2 - h^3\,dh \\
&= \frac{122625\pi}{2}\left[\frac{11}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4\right]_0^{10} \\
&= \frac{122625\pi}{2}\left(\frac{11}{3}10^3 - \frac{1}{4}10^4\right) \\
&= 71531250\pi \text{ Joule}
\end{aligned}$$

å tømme vannreservoaret ved å pumpe all vannet opp i en høyde 1 meter over vannreservoarets overflate.