TMA4100 Mat. 1
august 2010

Lf kont 21.08.10

$\boxed{1}$ L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x^2)}2x\cos(x^2)}{\sin x}=\left(\lim_{x\to 0}e^{\sin(x^2)}2\cos(x^2)\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)=2$$

$\boxed{2}$ Skivemetoden gir volumet, med $r=1+y=1+x^3$:

$$V=\int_0^1(\pi r^2-\pi 1^2)\,dx=\int_0^1\pi[(1+x^3)^2-1]\,dx=\frac{9\pi}{14}$$

$\boxed{3}$

$$\int\frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(1-\frac{3x+2}{x^2+3x+2}\right)dx$$

Delbrøk:

$$\frac{3x+2}{x^2+3x+2}=\frac{3x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{4}{x+2}$$

gir svaret

$$\int\frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+2}\right)dx=x+\ln|x+1|-4\ln|x+2|+C$$

$\boxed{4}$ Implisitt derivasjon:

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0\implies\frac{dy}{dx}=\frac{9y-3x^2}{3y^2-9x}$$

I punktet $(2,4)$: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{5}$, som gir tangentlinjen

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$$

$\boxed{5}$ $f(x)=x^6+7x^2-4$ har $f(0)=-4<0$ og $f(1)=4>0$, så skjæringssetningen garanterer et nullpunkt i $(0,1)$. Newtons metode

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^6+7x_n^2-4}{6x_n^5+14x_n}$$

med $x_0=0{,}5$ gir $x_1=0{,}810869$, $x_2=0{,}744961$, $x_3=0{,}740243$, $x_4=0{,}740221$ så $x\approx 0{,}74$.

$\boxed{6}$ Rottest gir absolutt konvergens for $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{1+n}\right| < 1$, dvs. $|x| < 1$. Sjekker endepunktene:

$$x = \pm 1 : \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$$

Divergerer fordi leddene i rekken ikke konvergerer mot null:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^{n+1} = e^{-1}$$

(se Rottmann side 80, punkt 1b)

Potensrekken konvergerer altså hvis og bare hvis $|x| < 1$.

$\boxed{7}$

$$I = \int_0^1 \cos(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 t^{4n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} = 1-\frac{1}{2!5}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{6!13}+\frac{1}{8!17}-+\cdots$$

Dette er en alternerende rekke med ledd som i absoluttverdi avtar i størrelse. Restleddsestimatet for slike rekker garanterer at feilen ved å kappe av rekken etter n ledd er mindre enn absoluttverdien av neste ledd. Første ledd som har absoluttverdi mindre enn $2\cdot 10^{-6}$ er $1/8!17$, så vi har

$$I \approx 1-\frac{1}{2!5}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{6!13} \approx 0{,}90452279$$

med avvik mindre enn $2\cdot 10^{-6}$.

$\boxed{8}$ Sett $t = 0$ idet vi begynner å pumpe inn vann. Vannvolumet ved tiden t (minutter) er da $V = 100 + t$ (liter). La $y = y(t)$ være den totale mengden salt (i gram) ved tiden t. Vi setter opp diff.lign.

$$y'(t) = (\text{inn})-(\text{ut}) = (2\text{ l/min})\cdot(0\text{ g/l}) - (1\text{ l/min})\cdot\left(\frac{y}{V}\text{ g/l}\right)$$

$$y' = -\frac{y}{V} = -\frac{y}{100+t}, \qquad y(0) = 10\cdot 100$$

som har løsning $y(t) = \dfrac{10^5}{100+t}$. Finner når saltkonsentrasjonen er nede i 5 gram pr. liter:

$$\frac{y}{V} = \frac{10^5}{(100+t)^2} = 5$$

som gir $t = \sqrt{\dfrac{10^5}{5}} - 100 = 100(\sqrt{2}-1) \approx 41{,}42$ minutter