Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Eksamen 14.12.2010

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Funksjonen f er kontinuerlig i 0 hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke avhenger av f sin verdi i 0 følger det at f er kontinuerlig i 0 hvis og bare hvis $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)}-1}{x} = 0$. Da

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin(2x)} - 1 = 0 = \lim_{x\to 0} x$$

og

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^{\sin(2x)} - 1)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0} 2\cos(2x)e^{\sin(2x)} = 2$$

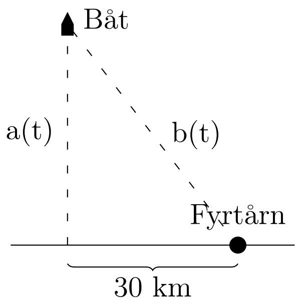
følger det av L'Hopitals regel at $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)}-1}{x} = 2$. Funksjonen f er derfor ikke kontinuerlig i 0.

$\boxed{2}$ Da f er kontinuerlig, $f(-2) = f(2) = 3 - \ln 5 > 0$ og $f(0) = -1 < 0$ følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(-2, 0)$ og et nullpunkt i intervallet $(0, 2)$.

Da $f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^3}{x^2+1}$ er negativ når $x < 0$ og positiv når $x > 0$, er f avtagende på intervallet $(-\infty, 0)$ og voksende på intervallet $(0, \infty)$. Det følger at f ikke kan ha flere enn de 2 nullpunktene vi fant ovenfor. (Alternativt kan man bruke middelverdisetningen til å vise at f ikke kan ha flere enn 2 nullpunkter: Anta at f har 3 forskjellige nullpunkter. Da følger det av middelverdisetningen at f' har 2 nullpunkter, men $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$ har bare et nullpunkt. Altså må vår antagelse om at f har 3 nullpunkter være feil, og f kan derfor høyest ha de 2 nullpunktene vi fant ovenfor.)

Altså har f 2 nullpunkter.

$\boxed{3}$ La $a(t)$ være strekningen målt i km båten har tilbakelagt til tiden t, og la $b(t)$ være avstanden målt i km mellom båten og fyrtårnet til tiden t (se figuren).



Da er

$$(*) \qquad (b(t))^2 = (a(t))^2 + 30^2.$$

Ved implisitt derivasjon får vi at

$$2b(t)b'(t) = 2a(t)a'(t).$$

Det følger at

$$a'(t) = b'(t)\frac{b(t)}{a(t)}.$$

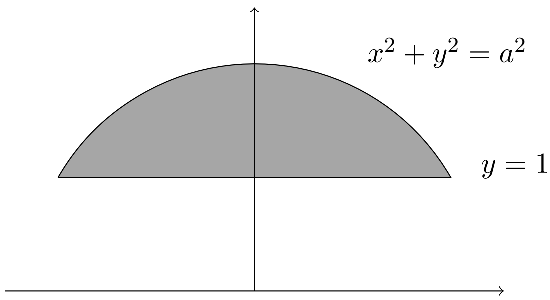
Når $b(t) = 50$ følger det av $(*)$ at $a(t) = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$. Følgelig er

$$a'(t) = 3 \text{ m/s } \frac{50}{40} = \frac{15}{4} \text{ m/s} = \frac{15}{4}\, 3{,}6 \text{ km/t} = 13{,}5 \text{ km/t}$$

når $b(t) = 50$ og $b'(t) = 3$ m/s.

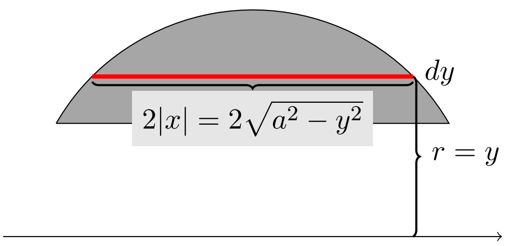
Altså kjører båten med en hastighet på 13,5 km/t på det tidspunktet hvor båten er 50 km fra fyrtårnet og avstanden mellom båten og fyrtårnet øker med 3 meter per sekund.

$\boxed{4}$ La O være området begrenset av kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $y = 1$ (se Figur 1).



Figur 1: Området O

Den gjenværende delen av kulen er det legemet som fremkommer når området O roteres om x-aksen. (En kan naturligvis også frembringe den gjenværende delen av kulen ved å rotere området begrenset av kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $x = 1$ om y-aksen. Gjør en det, må en bytte rundt på x og y i utregninger nedenfor.)

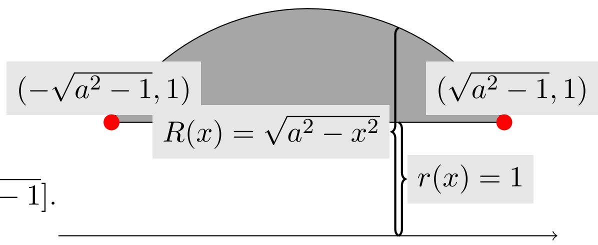


Figur 2: Sylinderskallmetoden

Vi bruker sylinderskallmetoden til å regne volumet ut og deler området O i infinitesimale horisontale striper. Hvis punktet (x, y) tilhører området O vil $y \in [1, a]$. For $y \in [1, a]$ vil stripen i y ha areal $dA = 2|x|\ dy = 2\sqrt{a^2 - y^2}\ dy$ og avstand $r = y$ til x-aksen. Volumet av den gjenværende delen av kula er følgelig

$$\int_1^a 2\pi r\ dA = \int_1^a 4\pi y \sqrt{a^2 - y^2}\ dy = 4\pi \int_1^a (a^2y^2 - y^4)^{1/2}\ dy$$
$$= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{3/2} \right]_1^a = \frac{4\pi}{3}(a^2 - 1)^{3/2}.$$

(Det er òg mulig å bruke "the washer method": Da kurven $x^2 + y^2 = a^2$ og linjen $y = 1$ skjærer hver andre i $(-\sqrt{a^2 - 1}, 1)$ og i $(\sqrt{a^2 - 1}, 1)$ integrerer vi over intervallet $[-\sqrt{a^2 - 1}, \sqrt{a^2 - 1}]$.



Figur 3: "The washer method"

Den indre radien er $r(x) = 1$ og den ytre radien er $R(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Følgelig er volumet av den gjenværende delen av kula

$$
\begin{aligned}
\pi \int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}} \left((R(x))^2 - (r(x))^2\right)\, dx &= \pi \int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}} (a^2 - x^2 - 1)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{a^2-1}} (a^2 - x^2 - 1)\, dx \\
&= 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^{\sqrt{a^2-1}} \\
&= 2\pi \left(a^2\sqrt{a^2-1} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3 - \sqrt{a^2-1} \right) \\
&= 2\pi \left((a^2-1)\sqrt{a^2-1} - \frac{1}{3}(a^2-1)^{3/2} \right) \\
&= \frac{4\pi}{3}(a^2-1)^{3/2}.
\end{aligned}
$$

(Vi har ved det annet likhetstegnet brukt at funksjonen $a^2 - x^2 - 1$ er jevn.))

$\boxed{5}$ Vi bruker delbrøkoppløsning:

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^2+2x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x^3+4x} \\
\iff A+B=3 &\text{ og } 4A=4 \text{ og } C=2 \\
\iff A=1 &\text{ og } B=C=2.
\end{aligned}
$$

Følgelig er

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+2x+4}{x^3+4x}\, dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+4}\, dx \\
&= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + \int \frac{2}{x^2+4}\, dx \\
&= \ln|x| + \ln(x^2+4) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}
$$

(Vi har brukt substitusjonen $u = x^2 + 4$, $du = 2x\ dx$ til å regne ut integralet $\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx$, og substitusjonen $v = \frac{x}{2}$, $dv = \frac{1}{2}\, dx$ samt formel 22) på side 135 i Rottmann til å regne ut integralet $\int \frac{2}{x^2+4}\, dx$).

$\boxed{6}$ Differensialligningen $y' + \tanh(x)y = x$ er en første ordens lineær differensialligning. Ifølge formel 164) på side 147 i Rotmann er $\int \tanh(x)\, dx = \ln(\cosh(x)) + C$. Vi bruker derfor $e^{\ln(\cosh(x))} = \cosh(x)$ som integrasjonsfaktor:

$$
x\cosh(x) = y'\cosh(x) + y\tanh(x)\cosh(x) = y'\cosh(x) + y\sinh(x) = \frac{d}{dx}(y\cosh(x)).
$$

Følgelig er

$$y\cosh(x) = \int x\cosh(x)\;dx = -\cosh(x) + x\sinh(x) + C.$$

(Her har vi brukt formel 176) på side 148 i Rottmann.)

Vi innsetter initialbetingelsen $y(0) = -1$ og får da at $-1 = -1 + C$. Så $C = 0$ og $y\cosh(x) = -\cosh(x) + x\sinh(x)$.

Det følger at løsningen til initialverdiproblemet er $y = -1 + x\tanh(x)$.

7 Ifølge Rottmann side 122 er $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ for alle x. Følgelig er $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n}}{n!} = e^{t^3}$ og $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n+1}}{n!} = te^{t^3}$ for alle t og

$$\int_0^x te^{t^3}\;dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n+1}}{n!}\;dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n+2}}{(3n+2)n!}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$$

for alle x.

Altså konvergerer potensrekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ for alle x og summen blir $\displaystyle\int_0^x te^{t^3}\;dt$.

(Det er mulig å vise at $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ konvergerer for alle x uten å finne summen ved for eksempel å bruke forholdstesten: For alle x har vi at

$$\left|\frac{\frac{x^{3(n+1)+2}}{(3(n+1)+2)(n+1)!}}{\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}}\right| = \frac{3n+2}{(3n+5)(n+1)}|x|^3 = \frac{3/n+2/n^2}{3+8/n+5/n^2}|x|^3 \to 0 \text{ når } n\to\infty.$$

Det følger derfor av forholdstesten at $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)n!}$ konvergerer absolutt, og dermed konvergerer, for alle x.)

8 Det følger av analysens fundamentalsetning at $f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Følgelig er $f''(x) = \pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Det følger av Taylors formel at hvis $T_1(x)$ er Taylorpolynomet av første grad om 1 til f så er

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2$$

for en c mellom 1 og x.

Hvis $0{,}9 < x < 1{,}1$ og $0{,}9 < c < 1{,}1$ er

$$\left|\frac{f''(c)}{2}(x-1)^2\right| \le \frac{1{,}1\pi}{2}(0{,}1)^2 < 0{,}02.$$

Følgelig er $|f(x) - T_1(x)| < 0{,}02$ når $0{,}9 < x < 1{,}1$. Vi kan derfor bruke $T_1(x)$ som $p(x)$.

Da $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$ er $p(x) = T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1$.