Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes	tlf. 73 59 35 17
Kristian Gjøsteen	tlf. 73 55 02 42
Lisa Lorentzen	tlf. 73 59 35 48
Alexander Lundervold	tlf. 73 59 17 44

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål
Onsdag 21. desember 2011
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Bestemt, enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 21. januar 2012

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Bestem grenseverdiene

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}, \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right).$$

Oppgave 2 Finn maksimum og minimum av

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

på intervallet $0 \le x \le 2$.

Oppgave 3 Ligningen

$$y(1-y^2) + \sin\left(\frac{2\pi x}{1+y^2}\right) = 0$$

beskriver en kurve i planet. Vis at kurven går gjennom punktet $(1,1)$, og finn ligningen for tangentlinjen til kurven i dette punktet.

Oppgave 4 Begrunn at ligningen

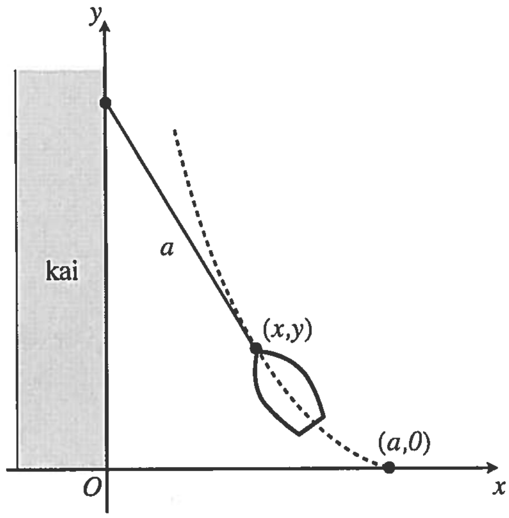
$$\sin x = 1 - x$$

har nøyaktig én løsning i intervallet $0 < x < 1$. Finn løsningen med 3 desimalers nøyaktighet ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 0{,}5$.

Oppgave 5 Finn løsningen $y = y(x)$ av initialverdiproblemet

$$y' = 2xy(1-y), \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 6 En robåt ligger i avstand a fra kaien og er fortøyet i punktet O med et tau som har lengde a. En jente løsner fortøyingen og går langs kaikanten mens hun trekker båten etter seg med tauet, som hele tiden er stramt. Båtens baug følger den stiplede kurven i figuren. Tauet er hele tiden tangent til denne kurven.



Vi ønsker å beskrive den stiplede kurven som en graf $y = f(x)$, $0 < x \leq a$.

Vis at $y = f(x)$ oppfyller

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Bestem $f(x)$ ved å løse differensialligningen. Integralet som fremkommer skal løses ved hjelp av substitusjonen $u = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Du kan bruke uten bevis at $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \ln \frac{a+u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + C \quad (|u| < a)$.

Oppgave 7

a) Vis ved integrasjon av den geometriske rekken $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ ($|x| < 1$) at

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

for $|x| < 1$.

b) Vis at for $0 < x < 1$ er

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| < \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(\frac{1}{1-x^2}\right).$$

(Hint: Bruk av Taylors formel anbefales ikke.)

Bruk denne ulikheten til å beregne $\ln(2)$ med feil mindre enn 10^{-5}.