Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, eksamen 21/12-2011

$\boxed{1}$ Den første grenseverdien er en ubestemt form av typen "0/0", og L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{-2x}=\frac{\cos(\pi)}{-2\pi}=\underline{\underline{\frac{1}{2\pi}}}.$$

Den andre grenseverdien er av form "$\infty-\infty$". Vi omformer uttrykket ved å multiplisere med $x+\sqrt{x^2-x}$ i teller og nevner:

$$x-\sqrt{x^2-x}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-(1/x)}},$$

der vi i siste overgang delte på x i teller og nevner. Derfor er

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-(1/x)}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

$\boxed{2}$ Den deriverte er

$$f'(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi finner kritiske punkter ved å løse $f'(x)=0$, som gir $2=2x^2$, dvs. $x=\pm 1$. Det eneste kritiske punktet i intervallet $[0,2]$ er altså $x=1$.

Vi setter opp en tabell over funksjonsverdiene i det kritiske punktet samt i intervallets endepunkter $x=0$ og $x=2$, og trekker ut laveste og høyeste verdi.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4/5

Svaret er altså: Maksimumsverdi er $f(1)=1$, minimumsverdi er $f(0)=0$.

$\boxed{3}$ Vi ser ved innsetting at ligningen er oppfylt for $(x,y)=(1,1)$, og dette punktet ligger derfor på kurven.

Implisitt derivasjon med hensyn på x gir (tenk på $y=y(x)$ som en funksjon av x og bruk kjerneregel)

$$y'(1-y^2)+y(-2yy')+\cos\left(\frac{2\pi x}{1+y^2}\right)\left(\frac{2\pi(1+y^2)-2\pi x(2yy')}{(1+y^2)^2}\right)=0$$

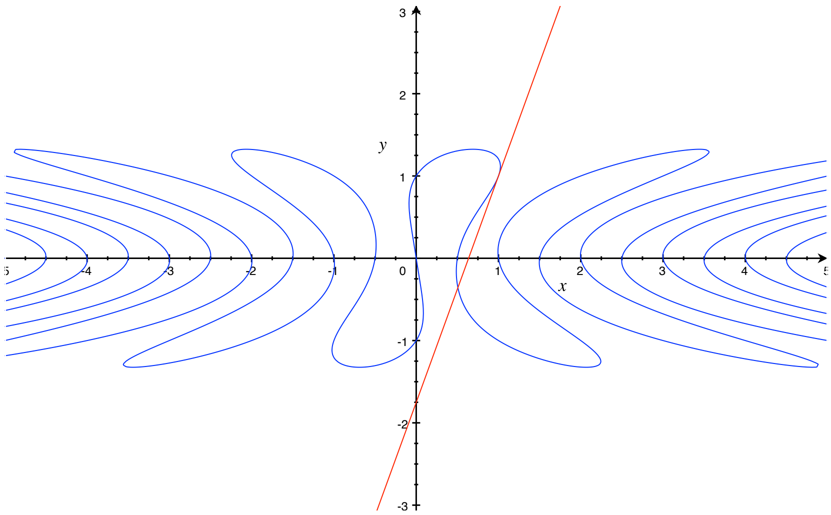
Innsatt $(x, y) = (1, 1)$:

$$-2y' + \cos(\pi)\left(\frac{4\pi - 4\pi y'}{4}\right) = -2y' - \pi + \pi y' = (\pi - 2)y' - \pi = 0 \qquad \Longrightarrow \; y' = \frac{\pi}{\pi - 2}$$

Stigningstallet til tangenten i $(1, 1)$ er altså $\frac{\pi}{\pi-2}$, og ligningen for tangenten er derfor

$$y - 1 = \frac{\pi}{\pi - 2}(x - 1), \qquad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi x - 2}{\pi - 2}}}.$$

For dem som måtte være nysgjerrige på hvordan dette ser ut, tar vi med et plot av kurven og tangentlinjen:



4 Sett $f(x) = \sin x + x - 1$, så ligningen som skal løses er $f(x) = 0$. Vi har $f(0) = -1 < 0 < f(1) = \sin 1$, så skjæringssetningen garanterer at ligningen har minst én løsning i intervallet $0 < x < 1$. At det ikke kan være to eller flere løsninger, kan vi slutte av at f er voksende i intervallet $0 < x < 1$, fordi $f'(x) = \cos x + 1 > 0$ der.

Vi setter opp Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n + x_n - 1}{\cos x_n + 1},$$

som med $x_0 = 0{,}5$ gir oss $x_1 = 0{,}5109579530$ og $x_2 = 0{,}5109734293$. Her har de fire første desimalene allerede stabilisert seg, og med tre desimalers nøyaktighet er svaret $x = 0{,}511$ (korrekt avrundet).

5 Vi separerer (anta $y \neq 0$ og $y \neq 1$):

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int 2x\,dx = x^2 + C. \tag{1}$$

Delbrøkoppløsning gir

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} \qquad \Longrightarrow \; 1 = A(1-y) + By,$$

der den siste ligningen gjelder for alle y (i utgangspunktet var $y = 0$ og $y = 1$ utelukket, men pga. kontinuitet vil ligningen også holde for disse verdiene av y), og ved å sette $y = 0$ og $y = 1$ finner vi $A = B = 1$ og dermed

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \ln|y| - \ln|1-y| + C' = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| + C'.$$

Sett dette inn i (1) (vi kan ta $C' = 0$, siden vi allerede har en integrasjonskonstant C på høyresiden av (1)) og ta exp av begge sider:

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x^2+C} = e^C e^{x^2} \implies \frac{y}{1-y} = (\pm e^C)e^{x^2} = De^{x^2} \quad \left(D = \pm e^C\right)$$

$$\implies y\left(1 + De^{x^2}\right) = De^{x^2} \implies y = \frac{De^{x^2}}{1 + De^{x^2}}$$

Til slutt bruker vi initalbetingelsen $y(0) = 1/2$ til å finne D:

$$y(0) = \frac{D}{1+D} = \frac{1}{2} \implies 2D = 1 + D \implies D = 1.$$

Svaret er altså (som vi også kan sjekke ved innsetting)

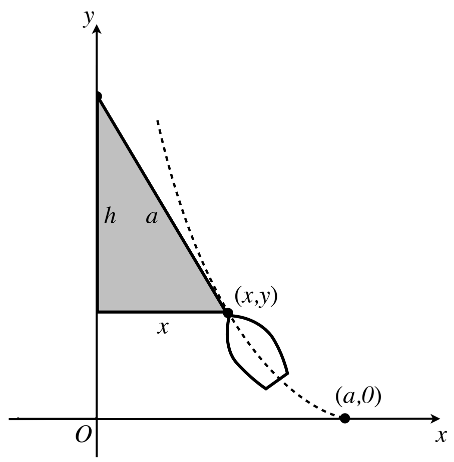
$$\underline{\underline{y = \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}}}.$$

$\boxed{6}$ Tangentens (tauets) stigningstall er y', og fra figuren under ser vi at

$$y' = \frac{-h}{x},$$

der h er høyden av den skraverte trekanten. Men $x^2 + h^2 = a^2$ gir $h = \sqrt{a^2 - x^2}$, så

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}. \tag{2}$$



Integrasjon av (2) gir

$$y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx. \tag{3}$$

Substitusjonen $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ gir

$$du = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{x}{u}\, dx \implies -u\, du = x\, dx$$

Vi ganger med x i teller og nevner inne i integralet i (3) for å få kombinasjonen $x\,dx$:

$$y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} x\, dx = -\int \frac{u}{x^2}(-u)\, du = \int \frac{u^2}{a^2 - u^2}\, du,$$

der vi i siste overgang brukte at $u^2 = a^2 - x^2$ og derfor $x^2 = a^2 - u^2$. Nå skriver vi

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{u^2}{a^2 - u^2}\, du = \int \frac{(u^2 - a^2) + a^2}{a^2 - u^2}\, du = \int \left(-1 + \frac{a^2}{a^2 - u^2}\right) du \\ &= -u + \int \frac{a^2}{a^2 - u^2}\, du = -u + a^2 \frac{1}{a} \ln \frac{a + u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + C, \end{aligned}$$

der vi brukte integralet oppgitt i oppgaveteksten. Med $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ får vi

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C,$$

og vi finner til slutt C ved å bruke at $y(a) = 0$ (fra figuren):

$$y(a) = a \ln(1) + C = C = 0.$$

Svaret er altså

$$\underline{\underline{y = f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}}}.$$

$\boxed{7}$ **a)** Vi tar utgangspunkt i den gitte rekken

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad (|x| < 1). \tag{4}$$

Integrasjon av begge sider gir (vi bruker her et teorem som sier at en potensrekke kan integreres leddvis innenfor konvergensintervallet)

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int x^{2n}\, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + C_1 \tag{5}$$

for $|x| < 1$. På den annen side er

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C_2 \qquad (|x| < 1), \tag{6}$$

som vi ser enten ved integrasjon ved hjelp av delbrøk:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln(1 + x) - \ln(1 - x)\right) + C_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C_2,$$

eller fra derivasjonen

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Fra (5) og (6) har vi

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = C_3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = C_3 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

og integrasjonskonstanten C_3 bestemmer vi ved å sette inn $x = 0$, som gir $(1/2)\ln(1) = C_3$, dvs. $C_3 = 0$. Altså er

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \tag{7}$$

for $|x| < 1$, som var det vi skulle vise.

b) La $0 < x < 1$. Fra (7) har vi

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)}_{\text{kall dette uttrykket } \Delta_n} = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \cdots.$$

Høyresiden er positiv fordi $x > 0$, og derfor er også venstresiden Δ_n positiv, og vi kan vi sette den i absoluttverdi om vi vil. Vi faktoriserer ut $x^{2n+3}/(2n+3)$ på høyresiden:

$$\begin{aligned}\Delta_n = |\Delta_n| &= \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(1 + \frac{2n+3}{2n+5}x^2 + \frac{2n+3}{2n+7}x^4 + \cdots\right)\\ &< \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\\ &= \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(\frac{1}{1-x^2}\right),\end{aligned}$$

der vi brukte $2n+3 < 2n+5 < 2n+7 < \cdots$ for å få ulikheten, og rekken (4) for å få den siste likheten. Vi har dermed vist den ønskede ulikheten:

$$|\Delta_n| = \left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| < \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\left(\frac{1}{1-x^2}\right). \tag{8}$$

For å svare på det siste spørsmålet, finner vi først x ved å løse

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \implies 1 + x = 2 - 2x \implies 3x = 1 \implies x = \frac{1}{3}.$$

(8) gir da (multiplisere med 2 på hver side)

$$\begin{aligned}\left|\ln(2) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\right)\right| &< \left(\frac{2}{1-1/9}\right)\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\\ &= \frac{9}{4(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}.\end{aligned}$$

Vi regner ut høyresiden for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ og stopper når vi kommer under 10^{-5}:

n	$\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}$	$\frac{9}{4(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}$
0	$\frac{1}{3\cdot 3^3} = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{5\cdot 3^5} = \frac{1}{1215}$	$\frac{1}{540}$
2	$\frac{1}{7\cdot 3^7} = \frac{1}{15309}$	$\frac{1}{6804}$
3	$\frac{1}{9\cdot 3^9} = \frac{1}{177147}$	$\frac{1}{78732}$
4	$\frac{1}{11\cdot 3^{11}} = \frac{1}{1948617}$	$\frac{1}{866052} < 10^{-5}$

Vi konkluderer at

$$\underline{\underline{\ln(2) \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) = 0{,}6931460}}$$

med feil mindre enn 10^{-5}.

Alternativ løsning av første del av punkt (b): Vi tar utgangspunkt i den geometriske summeformelen (for $t^2 \neq 1$)

$$1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = \frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2} \implies \frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2},$$

og integrerer denne over $[0, x]$ for en gitt $0 < x < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \left(1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n}\right) dx + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt$$

dvs.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt,$$

og det siste integralet oppfyller

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt < \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n+2}\, dt = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

der vi brukte at $0 < t < x \implies \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$. Vi konkluderer at (8) holder.