



Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes 73 59 35 17
John Erik Fornæss 73 59 35 22
Alexander Lundervold 73 55 02 88

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål

Fredag 21. desember 2012

Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (Kode C):

- Bestemt kalkulator (HP 30S, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College)
- Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 23. januar 2013

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x}{x^3}$$

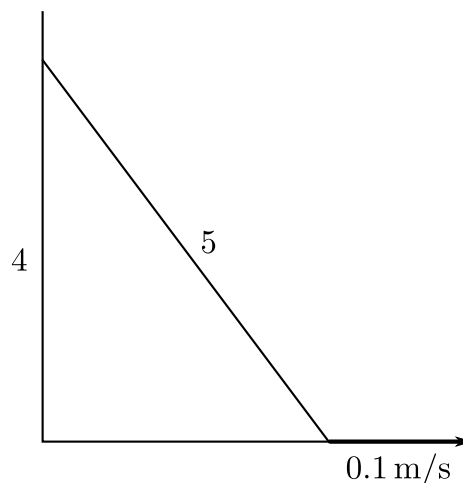
Oppgave 2 Avgjør om rekkene

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 1/n}{n} \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1/n}{n}$$

konvergerer. I tilfelle konvergens, avgjør om konvergensen er absolutt.

Oppgave 3

En 5 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. På et gitt tidspunkt er toppen av stigen 4 meter over bakken, og foten av stigen glir bort fra veggen med en fart av 0.1 m/s. Hvor fort beveger toppen av stigen seg på det gitte tidspunktet?

**Oppgave 4**

a) Bruk Newtons metode på funksjonen $f(x) = x^2 - 3$ til å vise at $\sqrt{3} \approx 1.732$ med tre desimalers nøyaktighet. Bruk $x_0 = 2$ som startverdi.

b) Vis at $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ for $|x| < 1$.

[Hint: Integrer en passende geometrisk rekke fra 0 til x .]

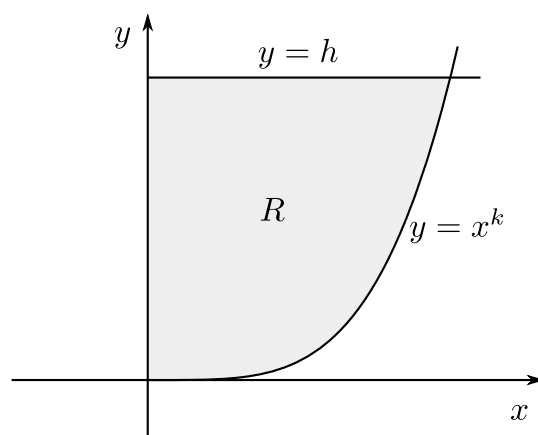
c) Bruk resultatet fra b) til å beregne π med en feil mindre enn $2 \cdot 10^{-3}$.

[Hint: Husk at $\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bruk tilnæringsverdien $\sqrt{3} \approx 1.732$ fra a).]

Oppgave 5 La k være et positivt tall, og la R være området i xy -planet begrenset av kurvene $y = x^k$, $y = h$ ($h > 0$) og y -aksen (se figur).

a) Området R roteres om y -aksen. Vis at volumet V til rotasjonslegemet er gitt ved $V = V(h) = \frac{\pi}{1+2/k} h^{1+2/k}$.

b) Rotasjonslegemet gjøres om til en vanntank, og fylles med vann til en høyde lik 1. Deretter tappes vannet ut ved å bore et lite hull i bunnen. Ifølge en fysisk lov (*Torricellis lov*) vil vannet strømme ut med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden over hullet. Hvis vi setter proporsjonalitetsfaktoren lik 1, har vi altså at $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y}$, hvor y er vannhøyden.



(forts. neste side)

På grunn av Torricellis lov finnes det en verdi av eksponenten k som gjør at vannhøyden avtar med konstant hastighet. Finn denne verdien av k . Hvor lang tid tar det før tanken er tom med denne verdien av k ? (Svaret vil komme ut som et ubenevnt tall, siden vi har underslått alle enheter ovenfor.)