Eksamen i TMA4100 Matematikk 1
21. desember 2012

Løsningsforslag

1

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{3}=\frac{1}{3}$$

2 (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+1/n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})$. Den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerer (p-rekke med $p=1$), mens $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer (p-rekke med $p=2$). Den gitte rekken er derfor *divergent* som en sum av en divergent og en konvergent rekke.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1/n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$. Den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer ved Leibniz's kriterium (testen for alternerende rekker), og $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer. Den gitte rekken er derfor *konvergent* som en sum av to konvergente rekker.
Den er imidlertid *ikke absolutt konvergent:* Vi har $|\frac{(-1)^n+1/n}{n}|>\frac{1-1/n}{n}>0$ for $n\geq 2$. Siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-1/n}{n}$ består av positive ledd for $n\geq 2$, kan vi grensesammenligne den med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})/n}{1/n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$, og siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er divergent, er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-1/n}{n}$ divergent. Siden $|\frac{(-1)^n+1/n}{n}|>\frac{1-1/n}{n}>0$ for $n\geq 2$, følger at $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^n+1/n}{n}|$ er divergent, dvs., $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1/n}{n}$ er ikke absolutt konvergent. Alternativt: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1/n}{n}$ hadde vært absolutt konvergent, ville rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^n+1/n}{n}\right)-\frac{1}{n^2}\right)$ vært absolutt konvergent (som en differanse mellom to absolutte konvergente rekker), noe som ikke er tilfelle. Ergo kan ikke $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1/n}{n}$ være absolutt konvergent.

3 Hvis vi lar x være avstanden fra bunnen av stigen til veggen, og y avstanden fra toppen av stigen til underlaget, vil vi til enhver tid ha at $x^2+y^2=5^2=25$. Implisitt derivasjon av denne ligningen mhp. t gir $2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$, som gir $\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$. På det aktuelle tidspunktet er $y=4$, $x=\sqrt{25-4^2}=3$ og $\frac{dx}{dt}=0.1$. Innsatt i uttrykket for $\frac{dy}{dt}$ gir dette $\frac{dy}{dt}=-\frac{3}{4}\cdot 0.1=-0.075$, dvs., toppen av stigen glir nedover veggen med en fart av $\boxed{0.075\text{ m/s}}$.

4 **a)** Vi har $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n}$, $n=0,1,2,3,\ldots$. Med $x_0=2$ får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
x_n	2	1.75	1.73214	1.73205	1.73205

Vi ser at tredje desimal ikke endrer seg etter andre iterasjon, og dette tar vi som numerisk evidens for at $\sqrt{3}\approx 1.732$ med tre desimalers nøyaktighet.

b) Vi har $\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$ og $\arctan 0=0$, så $\arctan x=\arctan x-\arctan 0=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$. For $|t|<1$ har vi $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ (en geometrisk rekke med faktor $-t^2$), så for $|x|<1$ kan den integreres leddvis fra 0 til x. Dette gir:

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

c) Siden $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, kan rekkeutviklingen fra **b)** brukes til beregning av arctan $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$$

$$\text{dvs.}\quad \pi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{6}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$$

Dette er en alternerende rekke hvor absoluttverdien av leddene går monotont mot null, så feilestimatet for alternerende rekker kan brukes. Hvis vi setter $u_n = \frac{6}{3^n(2n+1)\sqrt{3}}$, har vi derfor at summen av de n første leddene vil gi verdien av π med en feil mindre enn $2 \cdot 10^{-3}$ dersom vi velger n så stor at $u_{n+1} = \frac{6}{3^{n+1}(2n+3)\sqrt{3}} < 2 \cdot 10^{-3}$. Med 1.732 i stedet for $\sqrt{3}$ i uttrykket for u_n får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
$u_{n+1} = \frac{6}{3^{n+1}(2n+3)\cdot 1.732}$	0.3849	0.0769	0.0183	0.0047	0.0012
$\sum_{k=0}^{n} \frac{6}{3^k(2k+1)\cdot 1.732}$	3.4642	3.0792	3.1562	3.1379	3.1426

Så vi ser at $n = 4$ holder. Siden det første utelatte leddet har negativt fortegn, vil summen av de 4 første leddene være et overestimat. Hvis vi setter feilen lik 0.002 (selv om vi fra tabellen ser at den er mindre), får vi $3.1426 - 0.002 = 3.1406$ som et nedre estimat for π, og dermed har vi vist at $3.1406 < \pi < 3.1426$ (spesielt ser vi at de to første desimalene er sikre).

5 **a)** Volumet kan beregnes ved skivemeotden eller sylindermetoden. Vi viser begge metodene.

Skivemetoden: Her integrerer vi langs y-aksen fra $y = 0$ til $y = h$. For en gitt y vil radien i skiva være lik $y^{1/k}$ og vi får:

$$V = \int_0^h \pi(y^{1/k})^2 dy = \int_0^h \pi y^{2/k} dy = \pi\left[\frac{1}{1+2/k}y^{1+2/k}\right]_{y=0}^{y=h} = \frac{\pi}{1+2/k}h^{1+2/k}.$$

Sylindermetoden: Her integrerer vi langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = h^{1/k}$. For en gitt x vil høyden i sylinderskallet være lik $h - x^k$. Vi får:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{h^{1/k}} 2\pi x(h - x^k)dx = 2\pi \int_0^{h^{1/k}} (hx - x^{k+1})dx = 2\pi\left[\frac{1}{2}hx^2 - \frac{1}{k+2}x^{k+2}\right]_{x=0}^{x=h^{1/k}} \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2}hh^{2/k} - \frac{1}{2+k}(h^{1/k})^{k+2}\right] = 2\pi\left[\frac{1}{2}h^{1+2/k} - \frac{1}{2+k}h^{1+2/k}\right] \\
&= 2\pi h^{1+2/k}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}\right] = 2\pi h^{1+2/k}\frac{k}{2(k+2)} = \frac{\pi}{1+2/k}h^{1+2/k}.
\end{aligned}$$

b) Fra **a)** har vi at volumet V ved vannhøyde y er gitt ved $V = V(y) = \frac{\pi}{1+2/k}y^{1+2/k}$, og Torricellis lov sier at $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y}$. Til sammen gir dette:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{1+2/k}y^{1+2/k}\right] = \pi y^{2/k}\frac{dy}{dt} = -y^{1/2},$$

og vi ser at $\frac{dy}{dt}$ er konstant hvis og bare hvis $\boxed{k = 4}$.
Med denne verdien av k får vi $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\pi}$, og dermed $y = -\frac{1}{\pi}t + C$, hvor C er en konstant. Hvis vi setter $t = 0$ når $y = 1$, får vi $1 = C$ og dermed $y = 1 - \frac{1}{\pi}t$. Tanken er tom når $y = 0$, og det gir $\boxed{t = \pi}$. Dermed tar det π tidsenheter å tømme tanken.