Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Digernes 73 59 35 17
Alexander Lundervold 95 93 13 35

KONTINUASJONSEKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål
Lørdag 18. august 2012
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (Kode C):

- Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
- Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 8. september 2012

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cot x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}$ (Hint: Substituér $x=\dfrac{1}{t}$)

Oppgave 2 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & x\geq 0\\ a\cos x+b\sin x & x<0\end{cases}$$

der a og b er relle tall. Bestem a og b slik at f blir kontinuerlig og deriverbar for $x=0$.

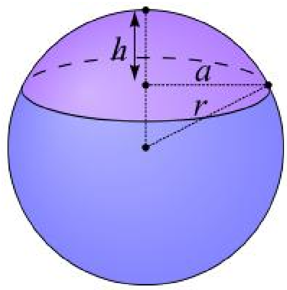
Oppgave 3

a) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ delintervaller til å finne en tilnærmet verdi av integralet $\int_1^3 \frac{1}{t} dt$. Vis ved hjelp av feilestimatet for trapesmetoden at $\int_1^3 \frac{1}{t} dt > 1$.
Bruk dette til å vise at $e < 3$.

b) Bruk Taylors formel for funksjonen e^x om $a = 0$ til å beregne Eulers tall e med en feil mindre enn 10^{-5}.

Oppgave 4

Figuren viser en kulekalott av høyde h og radius a i en kule med radius r (kulekalotten er den øvre del av figuren). Finn volumet til kulekalotten, uttrykt ved a og h, ved å rotere et passende plant område om en passende akse. Du kan anta at $h \leq r$.



Kulekalott

Oppgave 5 Løs initialverdiproblemet

$$y' + \frac{1}{\tanh x} y = 2\cosh x, \quad y(1) = b$$

der b er et reelt tall.
Finn spesielt den verdien av b som gjør at grensen $\lim_{x \to 0} y(x)$ eksisterer.

Oppgave 6 Et punkt har koordinater $(x, y) = (f(t), g(t))$ ved tiden t og beveger seg mot høyre langs kurven $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ på en slik måte at farten $v = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$ er konstant lik $\frac{2}{3}$. Ved tiden $t = 1$ er punktet i origo. Bestem punktets posisjon for alle $t \geq 1$.

Oppgave 7 La f være en funksjon slik at $f''(x) > 0$ for alle x. Bruk sekantsetningen (Mean Value Theorem) til å bevise at f har høyst to nullpunkt.