NTNU
Institutt for matematiske fag

Kontinuasjonseksamen i TMA4100
Matematikk 1
5. august 2013

Løsningsforslag

1

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos(x^2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+1}{\ln(1-x)-x\frac{1}{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{-\ln(1-x)-2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

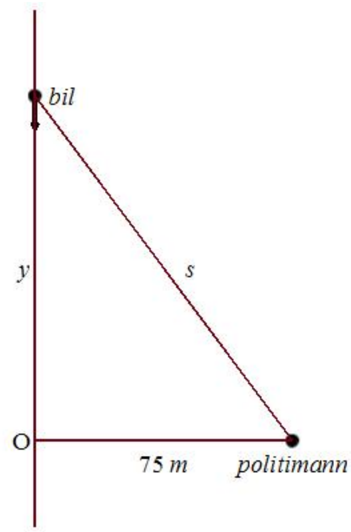
2 **a)** Vi viser først at ligningen har en løsning i intervallet $[0,1]$. Sett $f(x)=x^3+x-1$. Vi har $f(0)=-1<0$ og $f(1)=1>0$, så $f(0)<0<f(1)$. Fra skjæringssetningen (Intermediate Value Theorem) følger at det finnes et $x\in[0,1]$ slik at $f(x)=0$. Så ligningen har en løsning i $[0,1]$.Videre har vi at $f'(x)=3x^2+1>0$ for alle x, så f er strengt voksende. Dette medfører at det ikke finnes mer enn ett x slik at $f(x)=0$, så løsningen er entydig.

b) Vi har $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+x_n-1}{3x_n^2+1}$, $n=0,1,2,3,\ldots$. Med startverdi $x_0=1$ får vi følgende tabell:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	0.75	0.6860465116	0.6823395824	0.6823278040

Vi ser at fjerde desimal ikke endrer seg etter tredje iterasjon, så vi tar $\boxed{x=0.6823}$ som tilnærmet løsning med 4 desimalers nøyaktighet.

3 Med betegnelser som på figuren er bilens hastighet gitt ved $\frac{dy}{dt}$, hvor t er tiden. For alle t gjelder at $y^2+75^2=s^2$. Derivasjon av denne ligningen mhp. t gir $2y\frac{dy}{dt}=2s\frac{ds}{dt}$, dvs., $\frac{dy}{dt}=\frac{s}{y}\frac{ds}{dt}$. I det gitte øyeblikket er $s=125$ m og $ds/dt=-20$ m/s, som gir $y=\sqrt{125^2-75^2}$ m $=100$ m og $\frac{dy}{dt}=\frac{125}{100}(-20)$ m/s $=-25$ m/s $=-90$ km/h. Så bilen kjører med en fart av $\boxed{90\text{ km/h}}$.



For de som løste oppgaven ut fra feil bokmålsversjon: Her er $ds/dt=-17,5$ m/s, så $\frac{dy}{dt}=\frac{125}{100}(-17,5)$ m/s $=-21,875$ m/s $=-78,75$ km/h. Så bilen kjører med en fart av $\boxed{78,75\text{ km/h}}$.

4 **a)** La V være volumet til rotasjonslegemet. Med skivemetoden får vi:

$$V = \int_0^h \pi(\sqrt{\frac{y}{a}})^2 dy = \frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \boxed{\tfrac{\pi}{2}\tfrac{h^2}{a}}.$$

b) Hvis vi lar y være vannhøyden, vil volumet V ved vannhøyde y være gitt ved

$$V = V(y) = \frac{\pi}{2}\frac{y^2}{a}.$$

Derivasjon mhp. tiden t gir $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{a}y\frac{dy}{dt}$, dvs., $\frac{dy}{dt} = \frac{a}{\pi y}\frac{dV}{dt}$. I det gitte øyeblikket er $\frac{dV}{dt} = -2\,\mathrm{dm}^3$ og $y = 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}$. Med $a = \pi\,\mathrm{dm}^{-1}$ gir dette

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\pi\,\mathrm{dm}^{-1}}{\pi \cdot 10\,\mathrm{dm}}(-2)\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}} = -0,2\,\mathrm{dm/s} = -2\,\mathrm{cm/s}.$$

Med andre ord: Vannhøyden avtar med $\boxed{2\text{ cm/s}}$ i det gitte øyeblikket.

5 **a)** Med $u_n = \frac{x^{n+1}}{n}$ får vi

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n|x|^{n+2}}{(n+1)|x|^{n+1}} = \frac{n}{n+1}|x| \to |x| \quad \text{når } n \to \infty.$$

Forholdskriteriet gir da at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$, dvs., $\boxed{R = 1}$.
Endepunkter.
$x = 1$: Vi får den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som $\boxed{\text{divergerer}}$ (f.eks. ved integralkriteriet).
$x = -1$: Vi får den alternerende harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ som $\boxed{\text{konvergerer}}$ ved Leibniz's kriterium, nemlig: Rekken er alternerende, og absoluttverdien til leddene går *monotont* mot 0.

b) Med $f(x) = xg(x)$ får vi $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ for $|x| < 1$. Leddvis derivasjon av rekken er tillatt innenfor det åpne konvergensintervallet, så vi får $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^n$ når $|x| < 1$. Dette er en geometrisk rekke med faktor x, og summeformelen for geometriske gir $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$ når $|x| < 1$. Siden $g(x) = 0$, får vi $g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$, som til slutt gir

$$f(x) = xg(x) = \boxed{-x\ln(1-x)} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$