Oppgave 1 Den rasjonale funksjonen p er definert som

$$p(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2}.$$

Finn de tre grenseverdiene $\lim_{x\to 0} p(x)$, $\lim_{x\to 1} p(x)$ og $\lim_{x\to\infty} p(x)$.

Oppgave 2 La funksjonen f være gitt ved $f(x) = 2e^{-x^2} - x$.

a) Vis at det finnes ett, og kun ett, tall $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$.

b) La R være området i første kvadrant begrenset av koordinataksene og kurven $y = f(x)$. Vis at volumet, V, av omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere R om y-aksen er gitt ved

$$V = \frac{\pi}{3}(6 - 3c - 2c^3).$$

c) Finn c med en nøyaktighet på tre desimaler vha. Newtons metode og bruk dette til å anslå en tilnærmet verdi av V.

Oppgave 3 En funksjon f har verdi 1 og stigningstall 1/2 i $x = 0$. Videre er $f''(0) = 1/2$ og generelt er den n'te-deriverte av f i 0 gitt ved

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}, \qquad \text{for alle } \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Hvis f er analytisk på intervallet $(-2, 2)$, dvs. hvis $f(x)$ er lik sin Maclaurin-rekke (Taylor-rekke om 0) for alle $x \in (-2, 2)$, hva er $f(1)$?

Oppgave 4 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x, \quad y(\sqrt{2}) = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

Oppgave 5 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & x = 0. \end{cases}$$

a) Vis at g er en kontinuerlig og jevn funksjon. (En funksjon f er **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle x i domenet til f).

b) La A være området i planet begrenset av kurven $y = g(x)$ og linjene $y = 0$, $x = 1$ og $x = -1$. Vis at legemet som fremkommer ved å rotere A om x-aksen har volum

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

og estimér volumet med en feil mindre enn $\epsilon = \frac{1}{200000}$.

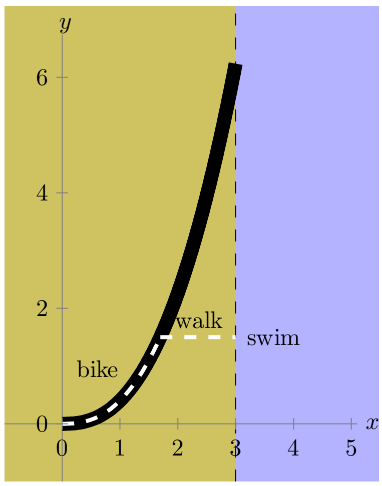
Hint:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \text{og} \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

for alle reelle tall t.

Oppgave 6

Du bor 3 km fra havet, og fra huset ditt i origo (se figur 1) går det en vei langs kurven $25y^2 = 4x^5$, $x \in [0, 3]$, $y \geq 0$ ned til stranden som ligger på linjen $x = 3$. En dag bestemmer du deg for å sykle eller gå ned til stranden for å bade. Når du sykler må du sykle på veien, men du kan når som helst parkere sykkelen og gå det siste stykket i en rett linje vinkelrett mot strandkanten (det spiller ingen rolle hvor på stranden du bader).



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 6

a) På hvilket punkt (x, y) på veien vil du parkere sykkelen og begynne å gå dersom du ønsker å komme frem på kortest mulig tid når du vet at du sykler 3 ganger raskere enn du går? Husk å bevise at din løsning faktisk gir den korteste reisetiden.

(Vi antar at både gang- og syklehastigheten er konstant.)

b) La funksjonen f være gitt ved $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$. For $0 \leq x \leq 2$ er $|f''(x)| \leq 3/2$ (du behøver ikke å vise det). Bruk trapesmetoden for å finne tallet

$$I = \int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\, dx$$

med en feil mindre eller lik 1/16. Kan du ut ifra denne tilnærmingen konkludere med at det tar mindre enn 21 minutter å dra ned til stranden på raksest mulig måte når ganghastigheten er $v = 6$ km/t?