Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 483 01 988

EKSAMEN I TMA4100 Matematikk 1

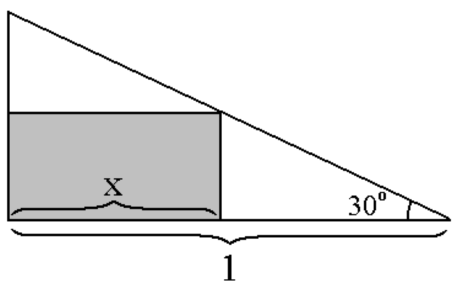
Bokmål
20. august 2011
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (Kode C): Bestemt, enkel kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $f(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}$ for $0 \leq x < \infty$. Vis at f er en voksende funksjon. Har f noen ekstremalpunkter?

Oppgave 2 Figuren viser et rektangel innskrevet i en rettvinklet trekant (x er lengden av den lengste siden). Hva er det største arealet et slikt rektangel kan få?



Oppgave 3 Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0. \end{cases}$$

Undersøk om $\lim_{x\to 0} f'(x)$ eksisterer. Bruk definisjonen av den deriverte til å avgjøre om f er deriverbar i $x = 0$.

Oppgave 4 Finn tyngdepunktet (sentroiden) til området avgrenset av x-aksen, kurven $y = x^2 + 1$ og linjene $x = -1$ og $x = 1$.

Oppgave 5 Ved en kjemisk reaksjon dannes det et nytt molekyl ut fra et molekyl av hvert av to stoffer. Da prosessen startet, dvs. ved $t = 0$, fantes de to stoffene med konsentrasjonene a og b ($\frac{\text{molykyler}}{\text{cm}^3}$). Hvis $y = y(t)$ er konsentrasjonen til det nye stoffet ved tiden t, tilfredsstiller y initialverdi-problemet

$$\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y), \qquad y(0) = 0,$$

der k er en proporsjonalitetsfaktor. Hva blir $y(t)$ for $t > 0$ når $a \neq b$.

Oppgave 6 Avgjør for hvilke x potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$$

konvergerer og finn et endelig uttrykk for summen til rekken.

Oppgave 7 Approksimasjonen $1 - x^2/2$ for $\cos x$ brukes for små x. Estimer feilen når $|x| < 0.5$.

Oppgave 8 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dx}{dt} - 2\frac{x}{t} = \sqrt{x}, \qquad 0 < t < \infty, \quad x(1) = 4$$

ved å innføre $y = \sqrt{x}$. ($x > 0$ er forutsatt)