LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4100 Matematikk 1

Oppgåve 1 La $g(x) = \arcsin(x)$ og $h(x) = \frac{x}{1+x}$. Merk at $f(x) = g\big(h(x)\big)$ slik at f er kontinuerleg på intervallet $[0, \infty)$. Dei deriverte av $g(x)$ og $h(x)$ er lik

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Ved å bruke kjederegelen får ein at

$$f'(x) = g'(u)\big|_{u=h(x)} h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x}{(1+x)^2}}} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

Ein kan sjå at for $x > 0$ er $f'(x) > 0$ og det følgjer at f er ein veksande funksjon.
Siden f er sterkt veksande for $0 \leq x < \infty$ følgjer at f kan ha ekstremalpunkt i dei to endepunkta. Når $x = 0$ er $f(0) = 0$ eit ekstremalpunkt. Når $x \to \infty$ så vil $f(x) \to \infty$ så $x = 0$ er det einaste ekstremalpunktet for f på intervallet $0 \leq x < \infty$.

Oppgåve 2 Høgda på rektangelet er lik $h = (1-x)\tan 30 = (1-x)\frac{1}{\sqrt{3}}$. Arealet av rektangelet kan skildrast ved uttrykket

$$A(x) = \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}}.$$

Den deriverte av $A(x)$ er lik

$$A'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{3}},$$

og $A'(x) = 0$ dersom $x = \frac{1}{2}$. Moglege ekstremalpunkt til A er $x = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ og ein kan sjå at det største moglege arealet på rektangelet er $A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Oppgåve 3 Ved å derivere $f(x)$ får ein

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}.$$

Ein kan sjå at $\lim_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$, medan $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ikkje eksisterer. Det følgjer at $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ikkje eksisterer.

Definisjonen av den deriverte gir at

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Det følgjer at f er deriverbar i $x = 0$.

Oppgåve 4 Vi finn tyngdepunktet til området ved å bruke vertikale remser. Tyngdepunktet til ei typisk vertikal remse kan skildrast som

$$\begin{aligned}
&\text{massesentrum}: \quad (\tilde{x},\tilde{y}) = (x, \frac{x^2+1}{2})\\
&\text{lengd}: \quad x^2+1\\
&\text{bredde}: \quad dx\\
&\text{areal}: \quad dA = (x^2+1)\,dx\\
&\text{masse}: \quad dm = dA
\end{aligned}$$

Momentet om x-aksen av den vertikale remsa er $\tilde{y}\,dm = \frac{x^2+1}{2}\,dA = \frac{(x^2+1)^2}{2}\,dx$. Følgjeleg

$$M_x = \int_{-1}^{1}\tilde{y}\,dm = \int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)^2}{2}\,dx = \frac{28}{15}.$$

Massen av området er

$$M = \int_{-1}^{1} dm = \int_{-1}^{1} x^2+1\,dx = \frac{8}{3},$$

så $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{7}{10}$. Fordelinga av området er symmetrisk om y-aksen så $\bar{x} = 0$. Tyngdepunktet til området er difor $(0, \frac{7}{10})$.

Oppgåve 5 Likninga skildrar ei separabel differensial-likning på forma

$$\frac{1}{k(a-y)(b-y)}\,dy = dt, \qquad y(0) = 0.$$

Ved å integrere på begge sider av likskapsteiknet får ein

$$\frac{1}{k}\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \int dt = t + C_1.$$

Delbrøksoppspalting gir $\frac{1}{(a-y)(b-y)} = \frac{1}{b-a}\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{b-y}$ og ved å integrere får ein

$$\frac{1}{k}\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \frac{1}{k}\int \frac{1}{b-a}\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{b-y}\,dy = \frac{1}{k}\frac{\ln(y-a)}{a-b} - \frac{1}{k}\frac{\ln(y-b)}{a-b} + C_2.$$

Ved å setje inn i likninga ovanfor og bruke rekneregla for logaritma får ein

$$\ln\frac{y-a}{y-b} = kt(a-b) + C.$$

Startverdien $y(0) = 0$ gir at $C = \ln\frac{a}{b}$. Ved å bruke eksponential-funksjonen får ein

$$\frac{y-a}{y-b} = e^{\ln\frac{a}{b}}e^{kt(a-b)} \Rightarrow y = \frac{a - ae^{kt(a-b)}}{\frac{a}{b}e^{kt(a-b)} - 1}.$$

Løysinga av initialverdi-problemet blir

$$y = \frac{a - ae^{kt(a-b)}}{\frac{a}{b}e^{kt(a-b)} - 1}.$$

Oppgåve 6 La $a_n = \frac{(-1)^n}{n!2^n}x^{2n}$, og la x vere eit vilkårleg tal. Sidan

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!2^n}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}x^2 = 0,$$

følgjer at potensrekkja er konvergent for alle x. Potensrekka til eksponential-funksjonen er gitt ved $e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$. La $u = -\frac{x^2}{2}$. Då får ein

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n}.$$

Oppgåve 7 Polynomet $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ er 2.ordens Taylor-polynom til funksjonen $\cos x$ i punktet $x = 0$. Taylors formel gir at feilen kan estimerast ved

$$|\cos x - P_2(x)| \le M\frac{|x|^3}{3!}$$

der M er ein positiv konstant slik at $|\cos^{(3)} x| \leq M$. Sidan $\cos^{(3)} x = \sin x$ kan ein velgje $M = 1$. Ein får at feilen mellom funksjonen $\cos x$ og tilnærminga $P_2(x)$ på intervallet $|x| < \frac{1}{2}$ er gitt ved

$$|\cos x - P_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!} \leq \frac{1}{2^3 3!}.$$

Alternativt kan ein bruke at

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x.$$

Rekka $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ er alternerande og oppfyller krava til Leibniz's setning. Feilestimat for alternerande rekker gir at for $x < \frac{1}{2}$

$$|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!})| \leq \frac{x^2}{4!} < \frac{1}{2^4 4!}.$$

Oppgåve 8 La $y^2 = x$. Ved å bruke kjederegelen får ein $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$. Ved å sette inn i initialverdi-problemet får ein

$$2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{y^2}{t} = y, \quad 0 < t < \infty, \quad y(1) = \sqrt{x(1)} = 2.$$

Sidan $x(t) > 0$ følgjer at $y(t) > 0$ så vi kan omskrive initialverdi-problemet til

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = \frac{1}{2}.$$

Multipliser likninga med den integrerande faktor $v(t) = e^{\int -t^{-1}\, dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$:

$$\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t^2} = \frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \frac{1}{2t}.$$

Ved å integrere får ein

$$\frac{y}{t} = \int \frac{1}{2t}\, dt = \frac{1}{2}\ln t + C,$$

så $y(t) = t(\frac{1}{2}\ln t + C)$. Sidan $y(1) = 2$ får ein at $C = 2$ og $y(t) = t(\frac{1}{2}\ln t + 2)$. Følgjeleg er $x(t) = y(t)^2 = t^2(\frac{1}{2}\ln t + 2)^2$.