

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke^a, Øyvind Solberg^b

Tlf: ^a73 59 81 26, 990 41 673, ^b73 59 17 48, 473 77 952

Eksamensdato: 1. desember 2016

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Bestemt kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann)

Annen informasjon:

I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig <input type="checkbox"/>	2-sidig <input checked="" type="checkbox"/>
sort/hvit <input checked="" type="checkbox"/>	farger <input type="checkbox"/>
skal ha flervalgskjema <input type="checkbox"/>	

Dato

Sign

Oppgave 1

- a) Finn generell løsning av differensiallikningen $y'' + y = 0$.
- b) Finn generell løsning av differensiallikningen $y'' + y = \sin 2t + t^2 + 1$.

Oppgave 2

La V være det reelle vektorrommet av alle polynomer i én variabel, x , av grad mindre enn eller lik 2, det vil si $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Definer en funksjon $T: V \rightarrow V$ gitt ved at $T(f(x)) = (x+1)f'(x) + f(x)$ for alle polynomer $f(x)$ i V , der f' er den deriverte av f . La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Vis at $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ er en basis for V . Vis at T er en lineærtransformasjon. Vis at $[T(f(x))]_{\mathcal{B}} = A[f(x)]_{\mathcal{B}}$ for alle $f(x)$ i V , der $[g(x)]_{\mathcal{B}}$ er koordinatvektoren til $g(x)$ i V med hensyn på \mathcal{B} .
- b) Finn dimensjonen til kolonnerommet til A . Avgjør om A er inverterbar (invertibel).

Oppgave 3

$$\text{La } A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn egenverdiene til A og en basis for hvert av egenrommene. Er A diagonaliserbar?
- b) A er overgangsmatrisen i en markovkjede. Finn likevektsvektoren (*steady-state*-vektoren) til A .

Oppgave 4

Finn den generelle løsningen av systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ av differensiallikninger, der

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

og x_1 , x_2 og x_3 er deriverbare reelle funksjoner av én reell variabel. Finn en spesiell løsning som er slik at

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hva skjer med denne løsningen når $t \rightarrow \infty$?

Det oppgis at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer til A , som hører til egenverdiene henholdsvis -1 , -2 og -2 .

Oppgave 5

a) Vis at

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

der $0 < \theta < 2\pi$. (Vink: Multipliser teller og nevner i brøken vi skal finne realdelen av med $e^{-i\theta/2}$.)

b) Vis at

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

for $0 < \theta < 2\pi$. (Vink: Du kan bruke formelen $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$, der $z \neq 1$, for en endelig geometrisk rekke.)

Oppgave 6

La A være en $n \times n$ -matrise. Vis at A er symmetrisk og positivt definittt hvis og bare hvis det fins en inverterbar (invertibel) $n \times n$ -matrise som er slik at $A = B^T B$.

(At en symmetrisk matrise A er positivt definittt, betyr at $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dette er ekvivalent med at alle egenverdiene til A er positive.)