Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke[a], Øyvind Solberg[b]

Tlf: [a] 73 59 81 26, 990 41 673 , [b] 73 59 17 48, 473 77 952

Eksamensdato: 1. desember 2016

Eksamenstid (frå–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Bestemd kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann)

Annan informasjon:
I vurderinga tel kvart av dei ti bokstavpunkta likt.

Alle svara skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller døme frå pensum).

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Finn generell løysing av differensiallikninga $y'' + y = 0$.

b) Finn generell løysing av differensiallikninga $y'' + y = \sin 2t + t^2 + 1$.

Oppgåve 2

La V vere det reelle vektorrommet av alle polynom i éin variabel, x, av grad mindre enn eller lik 2, det vil seie $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Definer ein funksjon $T\colon V \to V$ gitt ved at $T(f(x)) = (x+1)f'(x) + f(x)$ for alle polynom $f(x)$ i V, der f' er den deriverte av f. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ er ein basis for V. Vis at T er ein lineærtransformasjon. Vis at $[T(f(x))]_{\mathcal{B}} = A[f(x)]_{\mathcal{B}}$ for alle $f(x)$ i V, der $[g(x)]_{\mathcal{B}}$ er koordinatvektoren til $g(x)$ i V med omsyn på $\mathcal{B}$.

b) Finn dimensjonen til kolonnerommet til A. Avgjer om A er inverterbar (invertibel).

Oppgåve 3

La $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

a) Finn eigenverdiane til A og ein basis for kvart av eigeromma. Er A diagonaliserbar?

b) A er overgangsmatrisa i ei markovkjede. Finn jamvektsvektoren (*steady-state*-vektoren) til A.

Oppgåve 4

Finn den generelle løysinga av systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ av differensiallikningar, der

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

og x_1, x_2 og x_3 er deriverbare reelle funksjonar av éin reell variabel. Finn ei spesiell løysing som er slik at

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Kva skjer med denne løysinga når $t \to \infty$?

Det blir oppgitt at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

er eigenvektorar til A, som høyrer til eigenverdiane høvesvis -1, -2 og -2.

Oppgåve 5

a) Vis at

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

der $0 < \theta < 2\pi$. (Vink: Multipliser teljar og nemnar i brøken vi skal finne realdelen av med $e^{-i\theta/2}$.)

b) Vis at

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

for $0 < \theta < 2\pi$. (Vink: Du kan bruke formelen $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$, der $z \neq 1$, for ei endeleg geometrisk rekke.)

Oppgåve 6

La A vere ei $n \times n$-matrise. Vis at A er symmetrisk og positivt definitt viss og berre viss det fins ei inverterbar (invertibel) $n \times n$-matrise som er slik at $A = B^{\mathrm{T}}B$.

(At ei symmetrisk matrise A er positivt definitt, betyr at $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dette er ekvivalent med at alle eigenverdiane til A er positive.)