NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Antoine Julien[a], Markus Szymik[b]

Tlf: [a]73597782 , [b]41116793

Eksamensdato: 4. Desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Enkel Kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematiske formelsamling

Annen informasjon:
Gi begrunnelser for alle svar, forklar fremgangsmåten. Hver oppgave har samme vekt. *Since the lectures were given in English, an English language copy of the same exam is attached, so that you can check the terminology.*

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Gitt de komplekse tallene

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a) Skriv z_1/z_2 på formen $z_1/z_2 = a + ib$ (cos og sin må ikke brukes).

b) Beregn modulene og argumentene til z_1 og z_2. Skriv z_1 og z_2 på polar form.

c) Skriv z_1/z_2 på formen $z_1/z_2 = \rho e^{i\theta}$.

d) Bruk det overstående for å finne verdiene til $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$.

Oppgave 2 Gitt differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = g(x).$$

a) Finn den generelle løsningen av den *homogene* differensialligningen.

b) Finn en partikulærløsning hvis $g(x) = e^{-2x}$ og hvis $g(x) = e^{2x}$.

c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen når

$$g(x) = \frac{1}{4}(e^{-2x} + e^{2x}).$$

Oppgave 3 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}.$$

a) For hvilke a er matrisen A invertibel?

b) Beregn A^{-1} når den eksisterer.

Oppgave 4 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Hva er egenverdiene til A?

b) For hver egenverdi, finn en tilsvarende egenvektor.

c) Finn en basis til $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

d) Finn en *ortonormal* basis til $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

e) Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $D = P^{\mathrm{T}}AP$.

Oppgave 5

a) Gitt følgende datasett av tallpar (a, b),

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 2, \\ a_2 &= 2, \quad b_2 = 3, \\ a_3 &= 3, \quad b_3 = 5, \end{aligned}$$

skriv dette systemet

$$\begin{aligned} a_1x_1 + x_2 &= b_1 \\ a_2x_1 + x_2 &= b_2 \\ a_3x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

på matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: Hva er A, $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$?

b) La A og $\mathbf{b}$ være som i (b). Vis at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning.

c) Bruk minste kvadraters metode for å finne en approksimasjon $\mathbf{x}$ til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

d) La $\mathbf{x}$ være som i (d). Tegn de tre punktene svarende til datasettet, og tegn linjen $b = x_1a + x_2$.

e) La $\mathbf{x}$ være som i (d). Hva er $4x_1 + x_2$?

Oppgave 6

a) Finn løsningen til dette systemet:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 5. \end{aligned}$$

b) La

$$p_{\mathbf{x}}(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

være polynomet med de reelle koeffisientene $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Transformasjonen

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} p_{\mathbf{x}}(1) \\ p_{\mathbf{x}}(2) \\ p_{\mathbf{x}}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{bmatrix}$$

er lineær. Finn matrisen A som korresponderer til denne transformasjonen.

c) La A være som i (b). Vis at A er invertibel.

d) La A være som i (b). Finn $\mathbf{x}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

e) La $\mathbf{x}$ være som i (d). Beregn $p_{\mathbf{x}}(4) = x_1 + 4x_2 + 16x_3$.

Oppgave 7 Gitt $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ to vektorer i $\mathbb{R}^3$ som ikke er null og er lineært uavhengige. Gitt $\mathbf{w}$ en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke er null. Vis at det finnes en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som ikke er null og er ortogonal til $\mathbf{w}$.