NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Antoine Julien[a], Markus Szymik[b]

Tlf: [a]73597782 , [b]41116793

Eksamensdato: 4. Desember 2014

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Enkel Kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematiske formelsamling

Annan informasjon:
Grunngjev alle svar, forklar framgangsmåten. Kvar oppgåve har same vekt. *Since the lectures were given in English, an English language copy of the same exam is attached, so that you can check the terminology.*

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Gitt dei komplekse tala

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a) Skriv z_1/z_2 på forma $z_1/z_2 = a + ib$ (cos og sin må ikke brukast).

b) Rekn ut modulane og argumenta til z_1 og z_2. Skriv z_1 og z_2 på polar form.

c) Skriv z_1/z_2 på forma $z_1/z_2 = \rho e^{i\theta}$.

d) Bruk det overståande for å finne verdiane til $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$.

Oppgåve 2 Gitt differensiallikninga

$$y'' - 4y' + 4y = g(x).$$

a) Finn den generelle løysinga av den *homogene* differensiallikninga.

b) Finn ei partikulærløysing hvis $g(x) = e^{-2x}$ og hvis $g(x) = e^{2x}$.

c) Finn den generelle løysinga av differensiallikninga når

$$g(x) = \frac{1}{4}(e^{-2x} + e^{2x}).$$

Oppgåve 3 Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}.$$

a) For kva a er matrisa A invertibel?

b) Finn A^{-1} når den eksisterar.

Oppgåve 4 Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Kva er eigenverdiene til A?

b) For kvar eigenverdi finn ein tilsvarande eigenvektor.

c) Finn ein basis til $\mathbb{R}^3$ av eigenvektorar til A.

d) Finn ein *ortonormal* basis til $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorar til A.

e) Finn ei invertibel matrise P og ei diagonal matrise D slik at $D = P^{\mathrm{T}}AP$.

Oppgåve 5

a) Gitt fylgjande datasett av talpar (a, b),

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 2, \\ a_2 &= 2, \quad b_2 = 3, \\ a_3 &= 3, \quad b_3 = 5, \end{aligned}$$

skriv dette systemet

$$\begin{aligned} a_1x_1 + x_2 &= b_1 \\ a_2x_1 + x_2 &= b_2 \\ a_3x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

på matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: Kva er A, $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$?

b) Lat A og $\mathbf{b}$ vere som i (b). Vis at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikkje har ei løysing.

c) Nytt minste kvadratars metode for å finne ein approksimasjon $\mathbf{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

d) Lat $\mathbf{x}$ vere som i (d). Teikn dei tre punktane svarande til datasettet, og teikn linja $b = x_1a + x_2$.

e) Lat $\mathbf{x}$ vere som i (d). Kva er $4x_1 + x_2$?

Oppgåve 6

a) Finn løysinga til dette systemet:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 5. \end{aligned}$$

b) Lat

$$p_{\mathbf{x}}(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

vere polynomet med dei reelle koeffisientane $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Transformasjonen

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} p_{\mathbf{x}}(1) \\ p_{\mathbf{x}}(2) \\ p_{\mathbf{x}}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{bmatrix}$$

er lineær. Finn matrisa A som korresponderar til denne transformasjonen.

c) Lat A vere som i (b). Vis at A er invertibel.

d) Lat A vere som i (b). Finn $\mathbf{x}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

e) Lat $\mathbf{x}$ vere som i (d). Rekn ut $p_{\mathbf{x}}(4) = x_1 + 4x_2 + 16x_3$.

Oppgåve 7 Gitt $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ to vektorar i $\mathbb{R}^3$ som ikkje er null og erlineært uavhengige. Gitt $\mathbf{w}$ ein vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke er null. Vis at det finst ein lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som ikkje er null og er ortogonal til $\mathbf{w}$.