Oppgave 1 Finn alle løsninger av $-(z+i)^3 = 2+2i$, oppgi løsningene på standardform og tegn løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet:

$$y'' - y' - 6y = te^{3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Oppgave 3 Finn en partikulærløsning av differensiallikningen:

$$y'' + 2y' + y = t^{-2}e^{-t}.$$

Oppgave 4 Finn alle løsninger av ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 3x_3 + 12x_4 + 8x_5 &= -9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 &= -6 \end{aligned}$$

Oppgave 5 La $V \subseteq \mathbb{R}^4$ være underrommet spent ut av vektorene:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ på V.

Oppgave 6

a. Matrisa $A = \begin{bmatrix} .3 & .6 \\ .7 & .4 \end{bmatrix}$ er ei stokastisk matrise, og har derfor en likevektsvektor (steady-state vector) som er en egenvektor til A med tilhørende egenverdi 1. Finn en annen egenverdi av A og den tilhørende egenvektoren.

b. La $\vec{q}$ være likevektsvektoren til A. Start med $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og definer $\vec{v}_{k+1} = A\vec{v}_k$, hvor mange iterasjoner er nødvendig for å framstille $\vec{q}$ med 2 desimalers nøyaktighet?

Svaret ditt trenger ikke å være det minimale antall iterasjoner for å klare å oppnå denne nøyaktigheten, men du må ta med en forklaring på hvorfor talet du har kommet fram til er tilstrekkeleg mange iterasjoner.

(Å observere hvilket tall som passer ved å utføre noen iterasjoner er ikke tilstrekkeleg begrunnelse.)

Oppgave 7 Finn egenverdiene og egenvektorene til $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ og løs

$$\begin{aligned} x_1' &= -5x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= -4x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

med initialverdibetingelse $x_1(0) = x_2(0) = 3$.

Oppgave 8 Bruk en substitusjon på forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, og skriv den kvadratiske forma $4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2$ på forma $ay_1^2 + by_2^2$. Skisser mengda $\{(x_1, x_2) : 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 = 20\}$.

Oppgave 9 La A være ei $m \times m$ kvadratisk matrise. La λ være en egenverdi til A. Vis at mengda $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$.