Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Onsdag 20. desember 2011
Kl. 9-13

Oppgave 1 Løs ligningen $z^2 + 4z + 4 + 2i = 0$. Svaret skal skrives på formen $z = x + iy$.

Formel for røtter til andegradsligning gir $z_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{16 - 16 - 8i})/2 = -2 \pm \sqrt{-2i}$. Vi skriver $-2i$ på polarformen, $-2i = 2e^{-i\pi/2}$ og får $\sqrt{-2i} = \pm\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \pm(1 - i)$. Svaret blir $z_1 = -1 - i$ og $z_2 = -3 + i$.

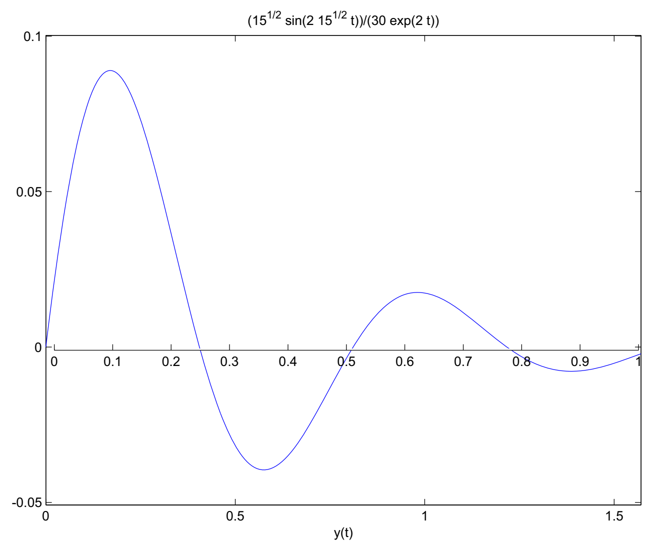
Oppgave 2 En dempet tvungen svingning er beskrevet ved differensialligningen

$$y''(t) + 4y'(t) + 64y(t) = \cos \omega t.$$

a) Bestem om bevegelsen er underdempet, overdempet eller om det er kritisk demping. Skisser (uten utregning) en løsning til den homogene ligningen med initialbetingelser $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + 4\lambda + 64 = 0$ og røtene $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 64}$ er komplekse. Bevegelsen er underdempet.

Løsningen til den homogene ligningen med initialbetingelser $y(0) = 0, y'(0) = 1$ er på formen $y(t) = ce^{-2t} \sin \omega t$ den går mot 0 og ser sån ut



b) Vis at $y_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ er en partikulær løsning av ligningen når

$$A = \frac{64-\omega^2}{(64-\omega^2)^2+16\omega^2}, \quad B = \frac{4\omega}{(64-\omega^2)^2+16\omega^2}.$$

Vi ser etter en partikulær løsning på formen $y_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Setter inn i ligningen og får

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t - 4A\omega\sin\omega t + 4B\omega\cos\omega t + 64A\cos\omega t + 64B\sin\omega t = \cos\omega t.$$

Dette gir $(64-\omega^2)A + 4\omega B = 1$ og $(64-\omega^2)B - 4\omega A = 0$. Vi løser systemet og får A og B som oppgitt.

c) Sett $C = \max y_p(t)$. For hvilken verdi av ω blir C størst? (Du kan bruke uten bevis at $C = \sqrt{A^2+B^2}$.)

Fra b) har vi

$$C = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{(64-\omega^2)^2+16\omega^2}}.$$

Den blir størst når $(64-\omega^2)^2+16\omega^2 = 64^2 - 112\omega^2 + \omega^4$ blir minst. Vi har $64^2 - 112\omega^2 + \omega^4 = (\omega^2-56)^2 + 64^2 - 56^2$, dette blir minst når $\omega = \pm\sqrt{56}$.

Oppgave 3

a) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' + 2y' - 3y = 9t^2.$$

Vi ser på den homogene ligningen først. Karakteristisk ligning blir $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ og $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$. Generell løsning til den homogene ligningen er $y_h = C_1e^t + C_2e^{-3t}$. Vi bruker ubestemte koeffisienters metode og setter inn $y_p = At^2 + Bt + C$. Dette gir $2A + 4At + 2B - 3At^2 - 3Bt - 3C = 9t^2$ og $A = -3$, $B = -4$, $C = -14/3$. Svaret blir $y(t) = C_1e^t + C_2y^{-3t} - 3t^2 - 4t - 14/3$.

b) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t}, \ t > 0.$$

Vi bruker variasjon av parametre. Først løser vi den homogene ligningen og får $y_1(t) = e^{-t}$ og $y_2(t) = te^{-t}$. Wronskideterminanten blir $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{-2t}$. Vi har

$$y_p(t) = -y_1\int\frac{y_2r}{W}dt + y_2\int\frac{y_1r}{W}dt = -e^{-t}\int 1dt + te^{-t}\int\frac{1}{t}dt = -te^{-t} + t\ln te^{-t}.$$

Siden $-te^{-t}$ er løsning av den homogene ligningen blir også $t\ln te^{-t}$ en partikulærløsning.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A). Hva er rang(A)?

Vi utgjør Gausseliminasjon på A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og finner ut at x_3 og x_4 er frie variabler, $x_2 = -2,5x_3 + x_4$ og $x_1 = 1,5x_3 - 2x_4$. En basis for nullrommet er

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En basis for kolonnerommet får vi når vi tar første og andre kolonnene til A

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rangen til A er lik dimensjonen til kolonnerommet som er 2, rank$(A) = 2$.

b) For hvilke verdier av a er $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ i Col(A)?

Vektoren $\mathbf{b}$ ligger i Col(A) hvis og bare hvis systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning. Vi bruker Gausseliminasjon

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Systemet har en løsning hvis og bare hvis $a - 1 = 0$. Svaret blir $\mathbf{b}$ er i Col(A) hvis og bare hvis $a = 1$.

c) La T være en lineær transformasjon med standardmatrise A. Avgjør om hver påstand under er sann eller usann (svarene skal begrunnes)

(1) T er en lineær transformasjon fra R^3 til R^4,

(2) T er en lineær transformasjon fra R^4 til R^3,

(3) T er på (onto),

(4) T er en-til-en (one-to-one).

(1) Usann, T tilsvarer til en 3×4-matrise, så den er ikke fra R^3,
(2) Sann, T tilsvarer til en 3×4-matrise, så den er en lineær transformasjon fra R^4 til R^3,
(3) Usann, vi vet fra b) at for eksempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke er i $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Im}(T)$.
(4) Usann, fra a) har vi $T(v_1) = Av_1 = 0$ og $v_1 \neq 0$.

Oppgave 5 Finn minste kvadraters løsning til systemet

$$\begin{array}{cccccc} x & & +z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & 5 \\ x & -2y & -z & = & 1 \\ & 4y & -z & = & -1 \end{array}$$

Vi skriver ned matrisen til systemet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

og ser på normalsystemet $A^T Ax = A^T b$. Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som etter utregning blir

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 24 & 4 \\ 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Vi løser dette systemet ved hjelp av Gausseliminasjon og får $z = 1$, $y = 0$ og $x = 1$. Svaret er $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Oppgave 6 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ er en (kompleks) egenvektor til A. Finn de komplekse egenverdiene og egenvektorene til A.

Vi har $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + i \end{bmatrix} = (1 - i\sqrt{3}\mathbf{v}$, så $\mathbf{v}$ er en egenvektor med tilsvarende egenverdi $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{3}$. Vi får $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 + \sqrt{3}$ og $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Oppgave 7 La A være en $n \times n$ matrise slik at $A^2 = A$. Vis at enhver vektor $\mathbf{x}$ i R^n kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ der $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = 0$.

La $\mathbf{x}$ være en vilkårlig vektor i R^n. Vi setter $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$. Da får vi $A\mathbf{u} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ fordi $A^2 = A$. Videre $A\mathbf{v} = A\mathbf{x} - A\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = 0$.