Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Toke Meier Carlsen (46249940)

Eksamen i TMA4110 Matematikk 3

Bokmål
Torsdag 13. desember 2012
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur: 13. januar 2013

Hjelpemidler (kode C): Bestemt enkel kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og utregningene dine skal være så detaljerte at framgangsmåten din kommer tydelig fram. Hver av de åtte oppgavene teller like mye.

Oppgave 1 Vis at $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ er et nullpunkt til polynomet $P(z) = z^5 - 2z^4 + 4z^3 - 8z^2 + 16z - 32$, og finn de 4 andre nullpunktene til P.

Oppgave 2 Finn den generelle lønsingen av differensiallikningen $y'' + 2y' + 5y = 2\cos t + 4\sin t$.

Oppgave 3 Finn den generelle løsningen av systemet

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= -15 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Oppgave 4 La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en inverterbar lineærtransformasjon slik at $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_3, 4x_1 - 3x_2 + 8x_3)$. Finn en formel for T^{-1}.

Oppgave 5 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Finn ortonormale basiser for kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$, radrommet $\mathrm{Row}(A)$ og nullrommet $\mathrm{Nul}(A)$.

Oppgave 6 La $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$. La $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ være Markovkjeden definert ved $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_{i+1} = P\mathbf{x}_i$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Finn likevektsvektoren (steady-state vector) for P, og en eksplisitt formel for $\mathbf{x}_i$.

Oppgave 7 Finn løsningen av systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_3' &= 3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

som oppfyller betingelsene $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ og $x_3(0) = 2$.

Oppgave 8 Finn likningen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ for minste kvadraters linje som er best tilpasset datapunktene (1,3), (2,5), (4,7) and (5,9).