Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg 92448828
Berit Stensones 96854060
Andrew Stacey 73590154

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3
Bokmål
Mandag 4. juni 2012
Kl. 9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 25. juni 2012

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1,2a,2b,3,4,5a,5b,6,7a,7b,8a,8b) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Løs $w^2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Finn alle løsninger av ligningen $z^4 + z^2 + 1 = 0$ og tegn dem i det komplekse plan. Skriv løsningene på formen $x + iy$.

Oppgave 2

a) Finn en partikulær løsning av $y'' - 4y' + y = te^t + t$.

b) Finn løsningen til $y'' - 4y' + y = te^t + t$, der $y'(0) = y(0) = 0$.

Oppgave 3 La a være et reellt tall. Finn den generelle løsningene av $y'' + ay = \cos x$.

Oppgave 4 Finn minste kvadraters løsning av

$$\begin{aligned} -y + z &= 1 \\ 2y - z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 0 \end{aligned} .$$

Oppgave 5 La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ være definert ved $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ -x + 3y + z \\ 2x - z \\ y + 4z \end{bmatrix}$.

a) Finn en matrise A slik at $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

b) Finn dim Null(A) og en basis for Col(A). Er T en-til-en (injektiv)? Er T på (surjektiv)?

Oppgave 6 La A være en 4×4 matrise. La $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Anta at $\det(AB) = 4$. Hva blir $\det(A)$?

Vis at ligningen $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ bare har løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Oppgave 7

a) Finn alle egenverdiene til $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Finn en basis for hvert egenrom til A. Er A diagonaliserbar?

Oppgave 8 La $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Finn de komplekse egenverdiene til A og de tilhørende egenvektorer i $\mathbb{C}^2$.

b) Finn løsningen til systemet av differensial ligninger $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$ som oppfyller $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Svaret skal skrives på formen $\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t) \end{bmatrix}$.