Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eugenia Malinnikova 47055678
Andrew Stacey 73590154
Hermund Torkildsen 40203048

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3
Bokmål
Mandag 6. juni 2011
Kl. 9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 27. juni 2011

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1, 2ab, 3ab, 4ab, 5, 6ab, 7, 8) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^3 = \frac{1+i}{1-i}.$$

Skriv løsningene på formen $re^{i\theta}$, og tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Finn en bestemt løsning på den homogene ligningen

$$y'' - y' - 2y = 0$$

med initialbetingelser $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$.

b) Finn generell løsning på ligningen

$$y'' - y' - 2y = 8\sin x + 3e^{2x}.$$

Oppgave 3 La $y_1(x) = \frac{1}{x}$ og $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$ for $x > 0$.

a) Vis at y_1 og y_2 er lineært uavhengige på $x > 0$.

b) Finn en Euler-Cauchy ligning med $y = c_1y_1 + c_2y_2$ som generell løsning.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for radrommet Row(A).

b) For hvilke verdier av a har det følgende ligningssystemet en løsning? Hvor mange løsninger har det da?

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & - & x_6 & = & a \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & & & = & 1 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & + & 10x_6 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

Oppgave 5 La V være kolonnerommet (søylerommet) til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

og la

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finn det nærmeste punktet til $\mathbf{b}$ i V (den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V).

Oppgave 6

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Bestem egenverdiene og tilhørende egenvektorer til A.

b) I Trondheim er det utplassert sykler til gratis utleie to steder: Gløshaugen (G) og Torget (T). Syklene kan lånes fra tidlig om morgenen og må returneres til ett av stedene samme kveld. Det viser seg at av syklene utlånt fra G returneres 80% til G og 20% til T. Av syklene utlånt fra T blir 30% returnert til G og 70% returnert til T. Vi antar dette mønsteret er konstant, at alle sykler blir utlånt hver morgen og at ingen sykler blir stjålet.

I det lange løp, hvor stor andel av syklene vil være på Gløshaugen om morgenen?

Oppgave 7 Finn en (2×2)-matrise A slik at differensialligningssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 La A være en $(m \times n)$-matrise. Vis at hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, så har $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare den trivielle løsningen.