Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4115 Matematikk 3

Faglig kontakt under eksamen: Andrew Stacey[a], Dag Wessel-Berg[b], Alexander Schmeding[c], Antoine Julien[d]

Tlf: [a] 73590154 , [b] 73591343 , [c] 40539912 , [d] 73591773

Eksamensdato: 20. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Enkel Kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematiske formelsamling

Annen informasjon:
Gi begrunnelser til alle svar, forklar hvordan svaret oppnås. Hver del har samme vekt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle løsninger av $\operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|$ og tegn dem i det komplekse planet.

Oppgave 2 Finn en partikulærløsning av differensialligningen:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{-t}.$$

Oppgave 3 Det gis at $y_1(x) = x^{-1}$ og $y_2(x) = x^{-2}$ er to lineært uavhengige løsninger av differensialligningen:

$$y''(x) + 4x^{-1}y'(x) + 2x^{-2}y(x) = 0, \qquad x > 0,$$

og finn den generelle løsningen av differensialligningen:

$$y''(x) + 4x^{-1}y'(x) + 2x^{-2}y(x) = x^{-3}, \qquad x > 0.$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 5 & 1 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn basiser for $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, og $\mathrm{Row}(A)$. Hva er $\dim(\mathrm{Null}(A^T))$?

Oppgave 5 For hvilke verdier av a er følgende mengde av vektorer lineært uavhengig? For hver a slik at vektorene er lineært avhengige gi en ikke-triviell relasjon mellom vektorene.

$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Oppgave 6 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$ som begynner med en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Oppgave 7 Den nye studentkaféen ved det Antarktiske Universitet av Tropisk Medisin tilbyr et valg mellom tre muligher: kjøtt, vegetar, og sandwich. Forskning viser at studenter velger maten avhengig kun av det de spiste dagen før. Det er en sannsynlighet på 0.1 at en student spiser det samme som dagen før. En student som ikke spiste kjøtt dagen før spiser kjøtt med en sannsynlighet på 0.3. En student som spiste kjøtt dagen før velger sandwich med en sannsynlighet på 0.3.

Sett opp den stokastiske matrisen til problemet og bruk den til å finne hvor stor andel av hver mattype som bør kjøpes inn i det lange løp.

Oppgave 8 Finn de egenverdier og egenvektorer (som kan være komplekse) til matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn alle løsninger til systemet av differensialligninger ved initialverdier $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_3 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 \end{aligned}$$

Angi svaret med reelle funksjoner.

Oppgave 9 En forsker noterer ned følgende data til sitt eksperiment:

Kontroll (x)	-2	-1	0	1	2
Avlesning (y)	5	4	2	4	15

Modellen er et kvadratisk uttrykk på formen $y = ax^2 + bx + c$. Finn den minste kvadraters løsning til a, b, c som er den beste for dette datasettet.

Oppgave 10 La A være en $m \times n$–matrise. Vis at $A^T A$ er en symmetriske matrise. Hvor stor er den?

Bruk spektralteoremet for å vise at det eksisterer en ortogonal basis $\{\vec{v}_j\}$ for $\mathbb{R}^n$ slik at $\{A\vec{v}_j\}$ er en ortogonal mengde (dvs vektorene er parvist ortogonale).