NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Gereon Quick

Tlf: 48 50 14 12

Eksamensdato: august 2016

Eksamenstid (frå–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Enkel kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annan informasjon:
Alle svar skal grunngjevast og det skal gå klart fram korleis svara er oppnådde. Kvar av dei 8 oppgåvene har same vekt.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Rekn ut $\left(\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}\right)^6$.

b) Bruk polarforma $z = r \cdot e^{i\theta}$ for å finne alle komplekse tal z som tilfredsstiller

$$2z^2 - \bar{z}^3 = 0.$$

Skisser løysingane i det komplekse planet.

Oppgåve 2

Finn den unike funksjonen $y(t)$ som tilfredsstiller initialverdiproblemet

$$\frac{1}{4}y'' - y' + y = 5e^{2t} + 1, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$$

Oppgåve 3

Vi har det følgande differensiallikningssystemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ med } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Diagonaliser matrisa A: finn ei inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP$ er ei diagonalmatrise.

b) Vi definerer ein ny variabel $\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}$. Kva for ei differensiallikning tilfredsstiller $\mathbf{y}$?

c) Finn den unike løysinga til systemet (1) som tilfredsstiller $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Oppgåve 4 La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ vere lineærtransformasjonen definert ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x - y + 2z - 2w.$$

Finn ein ortogonal basis for nullrommet til T.

Oppgåve 5

La $A = \begin{bmatrix} a & a-1 & a \\ a-1 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$

a) Bestem rangen til A for alle reelle tal a.

b) Bestem tala a og b slik at likningssystemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har uendeleg mange løysingar.

Oppgåve 6

Sjakkspelar Magnus kan anten vinne, spele uavgjort eller tape ein kamp. Trenaren hans har observert at Magnus sine kampar viser det følgande mønsteret:

- Dersom han vann den forrige kampen, er sannsynet 70% for at han vinn den neste kampen og 10% for at han taper den neste kampen.
- Dersom han spelte uavgjort i den forrige kampen, er sannsynet 80% for at han spelar uavgjort i den neste kampen og 10% for at han vinn den neste kampen.
- Dersom han tapte den forrige kampen, er sannsynet 30% for at han vinn den neste kampen og 30% for at han spelar uavgjort i den neste kampen.

Anta at treneren har observert mange kampar med dette mønsteret. Kva er det mest sannsynlige resultatet i Magnus sin neste kamp? (Oppgi sannsynet for kvart av dei tre moglege utfalla.)

Oppgåve 7

Finn likninga $y = ax^2 + bx + c$ som passar best til datapunkta
$(-2,6)$, $(-1,6)$, $(0,-2)$, $(1,2)$ og $(2,3)$.

Oppgåve 8

La A vere ei $n \times n$-matrise slik at A^2 er nullmatrisa, dvs. $n \times n$-matrisa der kvart element er null.

a) Vis at A ikkje er inverterbar.

b) Vis at den einaste eigenverdien til A er 0.

c) Gi eit døme på ei slik matrise A som ikkje er nullmatrisa.
(Tips: sjå på 2×2-matriser.)