NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Antoine Julien[a], Alexander Schmeding[b], Gereon Quick[c]

Tlf: [a] 73 59 77 82 , [b] 40 53 99 12 , [c] 48 50 14 12

Eksamensdato: 31. mai 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Enkel kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematiske formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 10 oppgavene har samme vekt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) For $z = (-1 + i\sqrt{3})$, kalkuler z^3 og $|z|^6$.

b) Finn alle komplekse tall z med $z^3 = 8i$ og tegn dem i det komplekse planet.

Oppgave 2

Se på den følgende inhomogene differensialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = \cos t. \tag{1}$$

a) Finn den generelle løsningen av den tilhørende homogene ligningen.

b) Finn en bestemt løsning av (1).

c) Finn den unike løsningen av (1) som tilfredsstiller $y(0) = y'(0) = 0$.

Oppgave 3 La a være et reelt tall og A være matrisen $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

a) Finn en fundamental mengde av reelle løsninger av differensialligningen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Løs initialverdiproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, hvor $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 4

La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$.

a) Skriv vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$.

b) Kan man skrive vektoren $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$?

c) Er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineært uavhengig?

d) Hva er determinanten av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$?

Oppgave 5

a) Finn den inverse av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær transformasjonen definert av

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Er T en-til-en?

Oppgave 6

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Omskriv A til trappeform.

b) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$ og bestem rangen av A.

c) Bestem dimensjonen av $\mathrm{Nul}(A)$.

d) Bestem dimensjonen av $\mathrm{Row}(A)$ og av $\mathrm{Nul}(A^T)$.

Oppgave 7

Temperaturen i Bymarka i løpet av vintersesongen kan enten være over, lik, eller under 0° Celsius. Trondheims skiklubb observerte de følgende svinginger i temperatur fra den ene dagen til den neste:

- Hvis temperaturen har vært over 0°, er det en 70% sjanse for at den vil være over og en 10% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.
- Hvis temperaturen har vært lik 0°, er det en 10% sjanse for at den vil være over og en 10% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.
- Hvis temperaturen har vært under 0°, er det en 10% sjanse for at den vil være over og en 70% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.

Etter mange dager med dette mønsteret i vinter, for hvilken temperatur bør en skiløper forberede hans/hennes ski? (Gi sannsynlighetene for de tre mulige temperaturene.)

Oppgave 8

Finn ligningen $y = mx + c$ av linjen som passer best til datapunktene
$(0, 4)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, -3)$ og $(4, -1)$.

Oppgave 9

La A være matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}$ være vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Kontroller at 2 er en egenverdi av A og at $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A (muligens med en egenverdi forskjellig fra 2).

b) Finn alle egenverdiene til A og en basis for hvert egenrom til A.

c) Er A ortogonalt diagonaliserbar? Hvis ja, ortogonal diagonaliser A.

Oppgave 10

La $W \subseteq \mathbb{R}^n$ være et underrom og $W^\perp$ være dens ortogonale komplement.

a) Vis at $W^\perp$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

b) La $\mathbf{w}$ være en vektor som ligger både i W og i $W^\perp$ (dvs. $\mathbf{w} \in W \cap W^\perp$). Vis at dette impliserer $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

c) La $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ være en basis for W og la $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ være en basis for $W^\perp$. Vis at $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.