Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Antoine Julien[a], Alexander Schmeding[b], Gereon Quick[c]

Tlf: [a] 73 59 77 82 , [b] 40 53 99 12 , [c] 48 50 14 12

Eksamensdato: 31. mai 2016

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Enkel kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, eller Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annan informasjon:
Alle svar skal grunngis og det skal gå klart frem korleis svara er oppnådde. Kvar av dei 10 oppgava har lik vekt.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 4

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1

a) For $z = (-1+i\sqrt{3})$, rekn ut z^3 og $|z|^6$.

b) Finn alle komplekse tal z med $z^3 = 8i$ og teikn dei i det komplekse planet.

Oppgåve 2

Sjå på differensiallikninga

$$y'' + 6y' + 9y = \cos t. \tag{1}$$

a) Finn den generelle løysinga til det tilsvarande homogene problemet.

b) Finn ei spesiell løysing til (1).

c) Finn den unike løysinga til (1) som tilfredsstiller $y(0) = y'(0) = 0$.

Oppgåve 3 La a vere eit reelt tal og la A vere matrisa $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

a) Finn eit fundamentalt sett av reelle løysingar til differensiallikninga $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Løys initialverdiproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, der $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Oppgåve 4

La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ vere vektorar $\mathbb{R}^3$.

a) Skriv vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$ som ein lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

b) Kan du skrive vektoren $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ som ein lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$?

c) Er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineært uavhengige?

d) Rekn ut determinanten til $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Oppgåve 5

a) Finn den inverse til matrisa $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vere lineærtransformasjonen

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Er T ein-til-ein?

Oppgåve 6

La A vere matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Rekkereduser A.

b) Finn ein basis for $\mathrm{Col}(A)$, og finn rangen til A.

c) Finn dimensjonen til $\mathrm{Nul}(A)$.

d) Finn dimensjonane til $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Nul}(A^T)$.

Oppgåve 7

Temperaturen i Bymarka om vinteren kan vere enten over, lik, eller under 0° Celsius. Trondheim Skiklubb observerer den følgende temperaturvariasjon fra ein dag til neste:

- Dersom temperaturen har vert over 0°, er det 70% sjanse for den er over, og 10% sjanse for at den er under 0° neste dag.
- Dersom temperaturen har vert lik 0°, er det 10% sjanse for den er over, og 10% sjanse for at den er under 0° neste dag.
- Dersom temperaturen har vert under 0°, er det 10% sjanse for den er over, og 70% sjanse for at den er under 0° neste dag.

Etter mange dagar med dette mønsteret, for kva temperatur bør ein skiløpar smøre skia? (Gi sannsynet for dei tre moglege temperaturane.)

Oppgåve 8

Finn ligninga $y = mx + c$ til linja som passar best til datapunktene $(0,4)$, $(1,-1)$, $(2,1)$, $(3,-3)$ og $(4,-1)$.

Oppgåve 9

La A vere matrisa $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}$ vere vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Verifiser at 2 er ein eigenverdi til A og at $\mathbf{u}$ er ein eigenvektor til A (moglegvis med ein annan eigenverdi enn 2).

b) Finn alle eigenverdiar til A, og ein basis for eigenrommet til A.

c) Er A ortogonalt diagonaliserbar? Dersom den er det, ortogonaldiagonaliser A.

Oppgåve 10

La$W \subseteq \mathbb{R}^n$ vere eit underrom, og $W^\perp$ underrommets ortogonale komplement.

a) Vis at $W^\perp$ er eit underrom av $\mathbb{R}^n$.

b) La $\mathbf{w}$ vere ein vektor som ligg både i W og i $W^\perp$ (altså $\mathbf{w} \in W \cap W^\perp$). Vis at dette medføre $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

c) La$\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ vere ein basis for W og la $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ vere ein basis for $W^\perp$. Vis at $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ er ein basis for $\mathbb{R}^n$.