NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Antoine Julien, Eugenia Malinnikova

Tlf: 73597782, 73550257

Eksamensdato: 26. mai, 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Enkel kalkulator (Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S), Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annen informasjon:

Alle svarene skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene teller likt ved sensuren.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Løs den kvadratiske ligningen $z^2 + (4+2i)z + 3 = 0$, skriv løsningene på normalformen.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$x'' + 6x' + 8x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 8.$$

Hva er den største verdien til løsningen $x(t)$ når $t > 0$?

b) Finn den stasjonære løsningen av ligningen

$$x'' + 6x' + 8x = 4\cos 2t.$$

Oppgave 3 Finn generell løsning til ligningen

$$y'' + y = 3x + \tan(x).$$

(Hint $\int (\cos x)^{-1} dx = \ln|\sec x + \tan x|$.)

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix}.$$

a) For hvilke verdier av t har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^2$?

b) Finn en LU-dekomposisjon av A (svaret skal være avhengig av t).

Oppgave 5 Gitt de følgende vektorene i $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

a) Er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineært uavhengige? Finn en basis for V.

b) Finn en ortogonal basis for V.

c) Finnes det en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^4$ som er ortogonal til $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$?

Oppgave 6

a) Finn (komplekse) egenverdier og (komplekse) egenvektorer til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Finn løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

som oppfyller initialbetingelsene $x_1(0) = 1$ og $x_2(0) = 1$. Skriv svaret med reelle funksjoner.

Oppgave 7 Anta at A er en $m \times n$-matrise med reelle elementer. Vis at $\mathbf{x} \cdot A^T A\mathbf{x} \geq 0$ for hver $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$, og derfor er hver reell egenverdi til $A^T A$ ikke-negativ.