Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Toke Meier Carlsen (46249940)
Louise Meier Carlsen (46366538)

Eksamen i TMA4115 Matematikk 3

Bokmål
Onsdag 5. juni 2013
Tidspunkt: 09:00 – 13:00
Sensur: 26. juni 2013

Hjelpemidler (kode C): Bestemt, enkel kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal være begrunnet, bortsett fra for oppgave 6, og beregningene skal være så detaljerte at framgangsmåten kommer klart fram. Hver av (del)oppgavene 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4, og 5 teller 10%, og hver av deloppgavene 6a–h teller 2,5%.

Oppgave 1 La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineærtransformasjon som er slik at

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}, \; T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \; T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}.$$

a) Finn standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T.

b) Finn en basis for nullrommet, $\mathrm{Nul}(A)$, til A, og en basis for kolonnerommet, $\mathrm{Col}(A)$, til A.

Oppgave 2

a) Finn løsningen av differensialligningen $y'' - y' = 0$ som tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen $y'' - y' = e^t \sin t$.

Oppgave 3 La $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn en ortogonal basis for det planet i $\mathbb{R}^3$ som er utspent av $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

b) Finn avstanden fra $\mathbf{v}$ til det planet i $\mathbb{R}^3$ som er utspent av $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

Oppgave 4 En partikkel som beveger seg i et plan under påvirkning av en kraft, har bevegelsesligningen

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

der $\mathbf{x}(t)$ beskriver posisjonen til partikkelen ved tiden t. Finn $\mathbf{x}(t)$ gitt at $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Svaret skal være på formen $\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt) \\ c_3 \cos(bt) + c_4 \sin(bt) \end{bmatrix}$ hvor a, b, c_1, c_2, c_3 og c_4 er reelle tall.

Oppgave 5 Det er oppgitt at

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} \right) = 2.$$

Bruk denne informasjonen til å beregne determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ 5p - 2a & 5q - 2b & 5r - 2c \end{bmatrix}.$$

Grunngi svaret ditt.

Oppgave 6 *Du trenger ikke å grunngi svarene dine i denne oppgaven*

a) For hvert av de følgende fire komplekse tallene, avgjør om det ligger i den første kvadranten av det komplekse planet (dvs. om både den reelle og imaginære delen av tallet er ikke-negative) eller ikke.

1. $\sqrt{3} - i$.
2. $\frac{-2+i}{2+3i}$.
3. $e^{-2+7\pi i}$.
4. z^2, der $|z| = 2$ og $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$.

b) La A være en $n \times n$-matrise, B en $m \times n$-matrix, og C en $n \times m$-matrise, der $n \neq m$. For hvert av de følgende fire uttrykkene, avgjør om det er veldefinert eller ikke.

1. AB^T.
2. BB^T.
3. $CB + 2A$.
4. $B^2 - A^2$.

c) La A og D være $n \times n$-matriser og la $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ ulik null. For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Hvis systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mer enn én løsning, så har også systemet $A\mathbf{x} = 0$ mer enn én løsning.
2. Hvis A^T ikke er inverterbar, så er heller ikke A inverterbar.
3. Hvis $AD = I$, så er $DA = I$.
4. Hvis A har ortonormale kolonner, så er A inverterbar.

d) For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. De to vektorene $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er ortogonale.
2. Hvis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, så ligger $\mathbf{z}$ i det ortogonale komplementet til $\mathrm{Span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.
3. En $m \times n$-matrise B har ortonormale kolonner hvis og bare hvis $BB^T = I$.
4. Hvis $\mathbf{x}$ står ortogonalt på $\mathbf{y}$ og på $\mathbf{z}$, så står $\mathbf{x}$ ortogonalt på $\mathbf{y} - \mathbf{z}$.

e) La A være en $n \times n$-matrise. For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Hvis A er ortogonalt diagonaliserbar, så er A symmetrisk.
2. Hvis A er en ortogonal matrise, så er A symmetrisk.
3. Hvis $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så er $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ positivt definitt.
4. Enhver kvadratisk form kan ved et variabelskifte bli transformert til en kvadratisk form uten kryssproduktledd.

f) La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, begge ulik null, og la r være en skalar. For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. $\|r\mathbf{v}\| = r\|\mathbf{v}\|$, bortsett fra hvis $r = 0$.
2. Hvis $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ er ortogonale, så er $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ lineært uavhengige.
3. Hvis $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, så er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ortogonale.
4. Hvis $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, så er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ortogonale.

g) For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Hvis A er en matrise, så er $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Nul}(A))$.
2. En 5×10-matrise kan ha et todimensionalt nullrom.
3. Radoperasjoner på en matrise kan endre nullrommet til matrisen.
4. Hvis matrisene A og B har samme reduserte trappeform, så er $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$.

h) For hver av de følgende fire påstandene, avgjør om den er sann eller ikke.

1. Polynomene $p_1(t) = 1 + t^2$ og $p_2(t) = 1 - t^2$ er lineært uavhengige.
2. Hvis A er en 3×4-matrise, så er avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ en lineærtransformasjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^4$.
3. Hvis en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er på $\mathbb{R}^4$ (eller er surjektiv), så kan ikke T være én-til-én (injektiv).
4. En lineærtransformasjon $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ kan ikke være én-til-én (injektiv).