Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Faye Knudsen tlf. 73 59 35 23
Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Fredag 17. desember 2004
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 15. januar 2005.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn den Laplacetransformerte av funksjonen $r(t)$ gitt ved

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ 1 & \text{for } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{for } t > 2 \end{cases}$$

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + y = r(t) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

hvor $r(t)$ er definert som i forrige punkt.

Oppgave 2

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ av differensialligningen

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

Denne ligningen modellerer f.eks. temperaturfordelingen i en tynn metallstav.

b) I tillegg til (1) og (2) innfører vi nå initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x). \tag{3}$$

Finn funksjonen $u(x,t)$ som oppfyller (1), (2) og (3).

Oppgave 3 Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon $f(x)$ kan skrives som

$$\int_0^\infty [A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)]\, dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(wx)\, dx \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(wx)\, dx.$$

a) Bestem funksjonene $A(w)$ og $B(w)$ for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

(Vink: Formlene i Rottmann nederst på s. 144 kan spare deg mye regning.)

b) Bruk resultatet fra forrige punkt til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos w}{1+w^2}\, dw.$$

(Om du ikke klarte punkt (a), kan du likevel prøve å forklare hvordan du ville gå frem for å løse punkt (b).)

Oppgave 4 La f være funksjonen gitt ved $f(x,y,z) = 2xy(e^z - e^x)$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett både på $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent. Finn den retningsderiverte av f i punktet $P : (1, -1, 1)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

Oppgave 5 Sett opp dividert differansetabell for datasettet

x_k	0	1	2	3	4
$f(x_k)$	0	1	0	-1	0

,

og bruk Newtons interpolasjonformel til å finne et polynom som interpolerer datasettet.

Oppgave 6 Vi betrakter initialverdiproblemet

$$x'' + x = 6\cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 3. \tag{$*$}$$

a) Skriv om $(*)$ som et initialverdiproblem for et system av to førsteordens differensialligninger.

b) Gjør ett skritt med Eulers metode, med skrittlengde $h = 0.1$, på systemet du fant i punkt (a). Hvis du ikke klarte punkt (a), kan du isteden bruke følgende initialverdiproblem:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + t, \end{cases} \qquad \text{med} \qquad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\,\mathbf{f}(x_n, \, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h\,\mathbf{f}(x_n + h, \, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$