Løsningsforslag i

TMA 4125

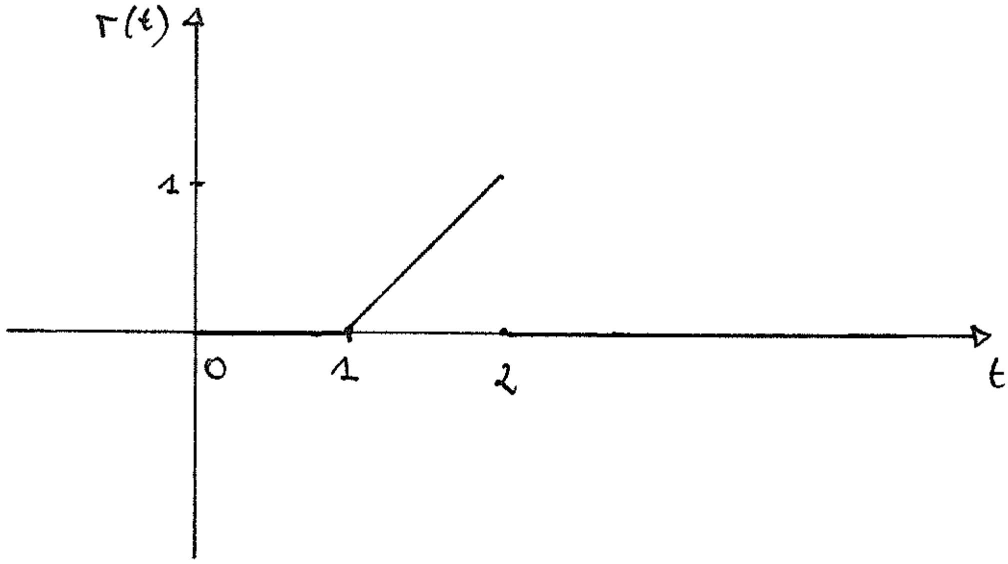
TMA 4130

TMA 4135

August 2005

Oppgave 1

a)



b) $R(s) = \mathcal{L}(r(t))$

Vi har $r(t) = (t-1)\,u(t-1) - (t-1)\,u(t-2)$

$$= (t-1)\left(u(t-1) - u(t-2)\right)$$

$$R(s) = \mathcal{L}\left((t-1)u(t-1)\right) - \mathcal{L}\left((t-1)\cdot u(t-2)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}e^{-s} - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

ved bruk av andre skift teorem.

c) Vi transformerer diffligningen

$$sY - y(0) - 2Y + \frac{Y}{s} = \frac{e^{-s}}{s} \qquad y(0) = 0$$

$$Y\frac{(s^2 - 2s + 1)}{s} = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2}$$

$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ $\qquad Y = e^{-s}F(s)$ $\qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$

$y = f(t-1)\,u(t-1)$ $\qquad$ andre skift teorem

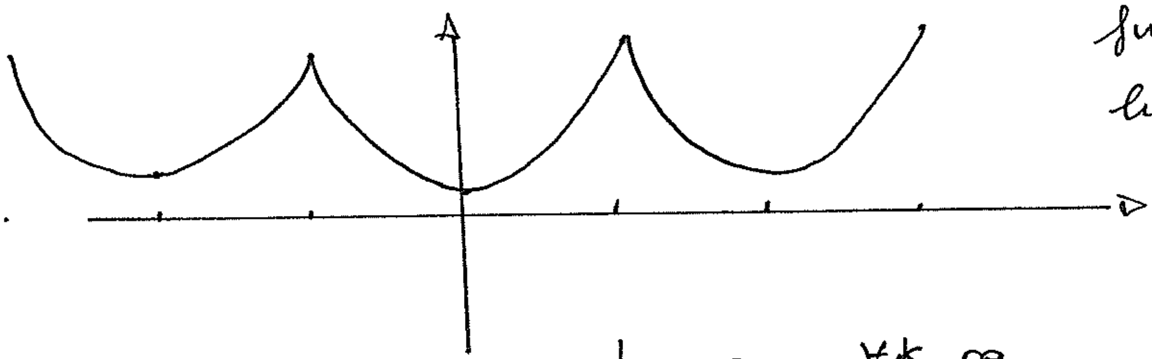
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = t\,e^{t}$$

og

$$y(t) = (t-1)\,e^{(t-1)}\,u(t-1)$$

Oppgave 2 Funksjonen er periodisk med periode 2π og slik at

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad -\pi \le x \le \pi,$$ da er



funsjonen er like

Fourier koeffisientene er $b_k = 0 \quad \forall k$, og

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1+ik)}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-ikx)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+ik}\left(e^{\pi(1+ik)} - e^{-\pi(1+ik)}\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\left(e^{\pi(1-ik)} - e^{-\pi(1-ik)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+k^2} \Big(e^{\pi(1+ik)}(1-ik) - e^{-\pi(1+ik)}(1-ik) +$$

$$+ e^{\pi(1-ik)}(1+ik) - e^{-\pi(1-ik)}(1+ik) \Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+k^2} \Big(e^{\pi}\big(e^{ik\pi}(1-ik) + e^{-ik\pi}(1+ik)\big) -$$

$$- e^{-\pi}\big(e^{-ik\pi}(1-ik) + e^{ik\pi}(1+ik)\big) \Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+k^2} \cancel{2} \Big(e^{\pi}\big(\overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k} - ik \overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}\big)$$

$$- e^{-\pi}\big(\cos(k\pi) + ik \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\big) \Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi(1+k^2)} \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(-1)^k =$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi} \frac{1}{1+k^2} \sinh(\pi)$$

og så

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \cos(kx) \quad //$$

b) Siden $f(x)$ er kontinuerlig, konvergerer Fourier rekka i alle punkter. Vi har

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi)\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \qquad k=0 \to \frac{(-1)^k}{1+k^2} = 1$$

$$\frac{\pi}{2\sinh(\pi)} + \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \quad //$$

$$\cosh(\pi) = f(\pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^k}{1+k^2}\right)$$

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} \qquad \left(k=0, \frac{1}{1+k^2} = 1\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} + \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$$

//

Oppgave 3

a) Vi må finne løsninger av type $u(x,t) = F(x)G(t)$ for den gitte diffligningen.

Vi får at siden $u_t = u_{xx}$,

$$F(x)\dot{G}(t) = F''(x)G(t)$$

d.v.s.

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} \Rightarrow \begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ \dot{G}(t) - kG(t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Fra randbetingelsene får vi

$$\begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \end{cases}$$

for $k=0$ og $k>0$ får man trivielle løsninger. For $k = -n^2$ (k negativt) har man

$$F = A\cos nx + B\sin nx$$

og $$F' = -nA\sin(nx) + nB\cos(nx)$$

som gir $$F'(0) = nB = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$F'(\pi) = -nA\sin(n\pi) = 0$$

dette kravet er tilfreshilt når $n = 0, 1, 2, \ldots$

Så $$F_n(x) = A_n \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ligningen for G er nå

$$\dot{G}(t) + n^2 G(t) = 0$$

med løsning $$G_n(t) = B_n e^{-n^2 t}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

og man får

$$u_n(x,t) = C_n \cos(nx)\, e^{-n^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Vi må finne løsningen som tilfreshille initial betingelsen

$$u(x,0) = \cosh(x) \qquad 0 < x < \pi$$

$$\cosh(x) \sim \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx)$$

Den generelle løsningen til vår problem er

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) e^{-n^2 t}$$

og

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx)$$

$$\Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) \qquad C_n = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

og $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + 2\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{-n^2 t}$$

Oppgave 4 TMA4125/30, 5 TMA4135

x_k	0	1	2	3	4
$p(x_k)$	1	-1	-1	1	5

Vi må finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer datasettet. Vi kaller polynomet $p(x)$. Siden $p(1)=p(2)=-1$, må det være at $p(x)+1$ har 1 og 2 som nullpunkter og da

$$p(x)+1=(x-1)(x-2)\,q(x).$$

Nå $p(x)$ har grad ≤ 4 (siden det interpolerer 5 punkter) og da $q(x)$ har grad ≤ 2. Vi finner $q(x)$.

$$\left.\begin{aligned} 2 &= p(0)+1 = 2\,q(0) \Rightarrow q(0)=1 \\ 2 &= p(3)+1 = 2\,q(3) \Rightarrow q(3)=1 \\ 6 &= p(4)+1 = 6\,q(4) \Rightarrow q(4)=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow q(x)\equiv 1$$

og $p(x)=(x-1)(x-2)-1 = x^2-3x+1$.

Man kan også benytte Lagrange eller Newton interpolasjon for å nå samme resultat.

Oppgave 4 TMA 4135

Vi skal finne den retningsderiverte av $f(x,y,z) = x + xy + xyz$ i retning $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i punktet $(1,-1,1)$.

$$D_{\vec{v}} f = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \cdot \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{grad} f\,(x,y,z) = (1+y+yz,\ x+xz,\ xy)$$

$$\operatorname{grad} f\,(P) = (1-1-1,\ 1+1,\ -1) = (-1, 2, -1)$$

$$\vec{v} = (-1, 1, -1)$$

$$D_{\vec{v}} f \Big|_P = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} (-1, 1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4$$

Oppgave 5 TMA4125/30, 6 TMA 4135

Vi skal utføre en iterasjon av Gauss-Seidel metode på systemet

$$\begin{aligned} -4x + 4y &= 16 \\ x - 4y + 2z &= 12 \\ 2y - 4z &= 9 \end{aligned}$$

ved å ta $x^{(0)} = -14$, $y^{(0)} = -10$, $z^{(0)} = -7$

Vi har

$$\begin{aligned} -4x^{(1)} &= -4y^{(0)} + 16 \\ x^{(1)} - 4y^{(1)} &= -2z^{(0)} + 12 \\ 2y^{(1)} - 4z^{(1)} &= 9 \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = -\frac{1}{4}\left(-4(-10) + 16\right) = -14$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{4}\left(14 + 14 + 12\right) = -10$$

$$z^{(1)} = -\frac{1}{4}\left(20 + 9\right) = -\frac{29}{4}$$

Oppgave 6 TMA 4125/30 , 7 TMA4135

a) Vi skal transformere diffligningen

$$x'' + 2x' - x = 3 - t \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$$

i et system av første orden. Vi setter

$$y_1(t) = x(t) \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$
$$y_2(t) = x'(t)$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -2y_2(t) + y_1(t) + 3 - t & y_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\vec{y}\,'(t) = f(t, \vec{y}) \quad \text{der} \quad f(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -2y_2 + y_1 + 3 - t \end{pmatrix}$$

b) Vi skal bruke Heuns metode på systemet med $h = 0.1$.

Vi har

$$\vec{k}_1 = 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2\cdot 2 + 1 + 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(0)} + 0.1\, f(t_0, \vec{y}^{(0)}) = \vec{y}_0 + \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_2 = 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2\cdot 2 + 1.2 + 3 - 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(0)} + \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + k_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.01 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.005 \end{pmatrix}$$