Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Yurii Lyubarskii (73 59 35 26)

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N/D (TMA4125 TMA4130 TMA4135)

Bokmål
Mandag 13. august 2007
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 03.09.2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn Fourier-sinusrekken og finn Fourier-cosinusrekken til funksjonen

$$f(x) = \sin \pi x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

Du vil få bruk for

$$\sin n\pi x \cos m\pi x = \frac{1}{2}(\sin(n-m)\pi x + \sin(n+m)\pi x)$$

b) Finn alle løsninger på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ av randverdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < 1.$$

c) Finn den løsningen av randverdiproblemet i b) som også tilfredsstiller randkravene

$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u(x,1) = 0 \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

Oppgave 2 La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π, gitt ved

$$f(x) = (x^2 + \pi^2)^2, \qquad -\pi < x < \pi$$

Det er gitt at Fourierrekken til $f(x) er$

$$\frac{28\pi^4}{15} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n(n^2\pi^2 - 3)}{n^4} \cos nx.$$

Du kan få bruk for

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \frac{2656\,\pi^9}{315}$$

a) Bruk fourierrekken over til å finne verdien av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 - 3}{n^4}.$$

Finn også summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\pi^4 - 6n^2\pi^2 + 9}{n^8}.$$

Oppgave 3

a) La $y(t)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' - y' - 6y = 100\Big(\sin t + u(t - \pi/2)\cos t\Big), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

der $u(t)$ er Heavisidefunksjonen (enhets-trappefunksjonen, the unit step function). Vis at den Laplacetransformerte av $y(t)$ er gitt ved

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s - 14}{s^2+1}\right)\left(1 - e^{-s\pi/2}\right).$$

b) Finn løsningen $y(t)$ av initialverdiproblemet i a).

Oppgave 4 Vi ser på initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y' &= xy \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Finn den eksakte løsningen til (1). Regn ut et steg ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 0.1$.

b) En 3. ordens Runge-Kutta metode er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3. \end{aligned}$$

Regn ut et steg med denne metoden for initialverdiproblemet (1) med $h = 0.1$. Sammelign resultatet med det du fikk i punkt a).

Oppgave 5

a) Den ikke-homogene biharmoniske likningen

$$\nabla^4 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x, y)$$

er gitt på området bestemt av $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$. Vi har i tillegg gitt randverdiene $u = 0$ og $\nabla^2 u = 0$ på alle ytre render.

Vis at dette problemet er ekvivalent med å løse de to elliptiske problemene:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = f(x, y), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ v(x, y) = 0 & \text{på randen} \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = v(x, y), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ u(x, y) = 0 & \text{på randen} \end{cases} \tag{2}$$

b) Bruk endelege differanser med skrittlengde $h = 1/3$ i hver retning til å finne et lineært likningsystem som størrelsene $u_{ij} \approx u(ih, jh)$ må oppfylle når funksjonen $f(x, y) = -1$ for alle x, y i området $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$