

Faglig kontakt under eksamen:  
Dag Wessel-Berg: tlf. 92 44 88 28



## EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål

Lørdag 9. august 2008

Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)  
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur 1. september 2008.

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

### Oppgave 1

a) Finn de Laplacetransformerte  $F(s)$ ,  $G(s)$  og  $H(s)$  til funksjonene

- i)  $f(t) = tu(t)$ ,
- ii)  $g(t) = te^{2t}u(t)$ ,
- iii)  $h(t) = (t-2)e^{2(t-2)}u(t-2)$ .

Her står  $u(t)$  for enhetstrappfunksjonen. Den er 0 for  $t < 0$  og 1 for  $t > 0$ .

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y' - 3y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau} d\tau = u(t-2), \quad y(0) = 1.$$

**Oppgave 2**

a) Finn alle løsninger på formen  $u(x,t) = F(x)G(t)$  av differensialligningen

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

b) I tillegg til (1) og (2) innfører vi nå initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x. \quad (3)$$

Finn funksjonen  $u(x,t)$  som oppfyller (1), (2) og (3).

**Oppgave 3** Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon  $f(x)$  kan skrives som

$$\int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx.$$

a) Bestem funksjonene  $A(w)$  og  $B(w)$  for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

(Vink: Formlene i Rottmann nederst på s. 144 kan spare deg mye regning.)

b) Bruk resultatet fra punkt a) til å finne verdien av

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin 2w}{1+w^2} dw.$$

**Oppgave 4** Finn den retningsderiverte i retningen av vektoren  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  av funksjonen

$$f(x,y,z) = e^{yz+zx+xy}$$

i punktet  $P : (-1, -1, 3)$ .

**Oppgave 5** Vi betrakter initialverdiproblemet

$$x'' - 2x' + x = 4t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1. \quad (*)$$

- a) Skriv om (\*) som et initialverdiproblem for et system av to førsteordens differensial-ligninger.
- b) Gjør ett skritt med Eulers metode, med skrittlengde  $h = 0.1$ , på systemet du fant i punkt a). Hvis du ikke klarte punkt a), kan du isteden bruke følgende initialverdiproblem:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2 + t, \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

**Oppgave 6** Finn polynomet av minst mulig grad, som interpolerer datasettet

$x_k$	0	1	2	3	4
$f(x_k)$	2	-1	2	-1	2

**Oppgave 7** Utfør én iterasjon med Gauss–Seidels metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} -4x + y &= 6 \\ x - 4y + z &= 7 \\ y - 4z &= 8 \end{aligned}$$

med startverdiene  $x^{(0)} = -2$ ,  $y^{(0)} = -3$ ,  $z^{(0)} = -3$ .