Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen TMA4135
10. august 2009

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)** Ved å benytte enhetstrappefunksjonen kan vi skrive

$$f(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2)) =$$
$$tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2).$$

Skifte på t-aksen gir da

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} =$$
$$\frac{1}{s^2}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right) = \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2.$$

b) Vi bruker delbrøkoppspalting.

$$\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Skifte på s-aksen gir da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3}\right\}(t) = e^{-t}\left(t - \frac{1}{2}t^2\right).$$

Skifte på t-aksen gir

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = g(t) = e^{-(t-2)}\left((t-2) - \frac{1}{2}(t-2)^2\right)u(t-2),$$

eller

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t < 2, \\ e^{-(t-2)}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right) & \text{for} \quad t > 2. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ **a)** Likeutvidelsen $\tilde{f}$ av f er periodisk med periode $2L = 4$, så vi har

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi finner

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{og}$$
$$a_n = \int_1^2 \cos n\frac{\pi}{2}x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n = 2k, \\ \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} & \text{if} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Skriver vi dette ut ser vi at

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1} - \frac{\cos 3\frac{\pi}{2}x}{3} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{2}x}{5} - \cdots\right).$$

b) Siden ligningen og randkravene er homogene gjelder superposisjonsprinsippet, så

$$u(x,t) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \cos n\frac{\pi}{2}x$$

er løsning av (1) og (2).
For også å få tilfredsstilt initialkravet (3) må vi velge $A_n = a_n$. Altså

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1} - e^{-(3\frac{\pi}{2})^2 t}\frac{\cos 3\frac{\pi}{2}x}{3} + e^{-(5\frac{\pi}{2})^2 t}\frac{\cos 5\frac{\pi}{2}x}{5} - \cdots\right).$$

c) Setter vi inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen, finner vi etter litt drøfting at

$$F'' = -\lambda^2 F \qquad \text{og} \qquad G' = -\lambda^2 G$$

med $\lambda > 0$. Vi har da at

$$F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad \text{og} \quad G(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$$

som insatt i (2) gir

$$A\cos\lambda 0 + B\sin\lambda 0 = 0 \quad \text{og} \quad \lambda B\cos\lambda 2 - \lambda A\sin\lambda 2 = 0.$$

Siden $\lambda > 0$ får vi ikketriviell løsning når

$$A = 0 \quad \text{og} \quad 2\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

eller

$$\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{4} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Altså

$$u_n(x,t) = B_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi}{4}x.$$

$\boxed{3}$ Dersom vi setter $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ har vi $\hat{h}(w) = h(w) = e^{-\frac{w^2}{2}}$, og

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}}\,du = (h \star h)(x).$$

Konvolusjonsregelen viser at

$$\mathcal{F}\{h \star h\}(w) = \sqrt{2\pi}h(w)h(w) = \sqrt{2\pi}e^{-w^2}.$$

Fourierinversjon gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}}\,du = (h \star h)(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

$\boxed{4}$ Vi finner først gradienten til funksjonen i punktet (x_0, y_0).

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\boldsymbol{j}.$$

Litt regning gir

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = 2x\left(1 + e^{y^3}\right)^2 \boldsymbol{i} + 6x^2y^2e^{y^3}\left(1 + e^{y^3}\right)\boldsymbol{j}.$$

Gradienten i punktet $(1,1)$ blir dermed $2(1+e)^2\boldsymbol{i} + 6e(1+e)\boldsymbol{j}$. Det er da bare å skrive opp svaret.

$$\boldsymbol{u}_+ = \frac{1}{\sqrt{10e^2+2e+1}}((1+e)\boldsymbol{i}+3e\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{u}_- = -\boldsymbol{u}_+ \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{10e^2+2e+1}}(3e\boldsymbol{i}-(1+e)\boldsymbol{j}).$$

$\boxed{5}$ Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1, \end{cases} \tag{1}$$

med initialbetingelse

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

a) En tilnærmelse til løsningen $\boldsymbol{y}_i = [y_{1,i}, y_{2,i}]^T \approx \boldsymbol{y}(t_i)$, $t_i = t_0 + ih$, ved bruk av implisitt trapesmetode et skritt, $h = 0.2$, gitt av

$$\boldsymbol{y}(0.2) \approx \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)\right],$$

gir

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_{2,1} \\ y_{1,1} \end{bmatrix}\right)$$

Løser vi ut de ukjente får vi

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{101}\begin{bmatrix} 99 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98019801\ldots \\ 0.19801980\ldots \end{bmatrix}.$$

b) Vi skal vise at

$$\|\boldsymbol{y}(t)\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 1, \quad \text{for} \quad t \geq 0 \quad (\boldsymbol{y}(0) = [1,0]^T).$$

For enkelhets skyld viser vi $\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$. Siden $\|\boldsymbol{y}\|_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1$, og

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{y}(0)\|_2^2 = \frac{d}{dt}\left(y_1^2 + y_2^2\right) = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2\left(y_1(-y_2) + y_1y_2\right) = 0$$

så er $\|\boldsymbol{y}\|_2^2$ (og dermed $\|\boldsymbol{y}\|_2$) konstant bevart for $t \geq 0$. Dette kan også vises ved finne og bruke den eksakte løsningen $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$ for at vise $\|\boldsymbol{y}(t)\|_2 = 1$.

c) Vi skal vise at $\|\boldsymbol{y}_{i+1}\|_2 = \|\boldsymbol{y}_i\|_2$, for $i = 0, 1, 2, \ldots$, der $\boldsymbol{y}_i = [y_{1,i}, y_{2,i}]^T$ er gitt av den implisitte trapesmetoden

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_i) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{i+1})\right].$$

Gitt ligningssystemet (1)

$$\begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\left(\begin{bmatrix} -y_{2,i} \\ y_{1,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_{2,i+1} \\ y_{1,i+1} \end{bmatrix}\right).$$

Løser vi for $\boldsymbol{y}_{i+1}$ får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix}$$

og siden

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4+h^2}\begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}$$

er

$$\begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4+h^2}\begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{4+h^2}\begin{bmatrix} (4-h^2)y_{1,i} - 4hy_{2,i} \\ 4hy_{1,i} + (4-h^2)y_{2,i} \end{bmatrix}.$$

Vi får til slutt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{y}_{i+1}\|_2^2 &= \frac{1}{(4+h^2)^2}\Big((4-h^2)^2y_{1,i}^2 + 16h^2y_{2,i}^2 + 16h^2y_{1,i}^2 + (4-h^2)^2y_{2,i}^2\Big) \\
&= \frac{1}{(4+h^2)^2}\Big((4+h^2)^2y_{1,i}^2 + (4+h^2)^2y_{2,i}^2\Big) = y_{1,i}^2 + y_{2,i}^2 = \|\boldsymbol{y}_i\|_2^2.
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Gitt ligningssystemet

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^{-y} - x, \\ y' = x - y, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Et skritt, $h = 0.5$, med Heuns metode, gitt av

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_1 &= h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n), \\
\boldsymbol{K}_2 &= h\boldsymbol{f}(t_n + h, \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{K}_1), \\
\boldsymbol{y}_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2),
\end{aligned}$$

gir, hvis $\boldsymbol{y}_0 = [x_0, y_0]^T = [0, 0]^T$

$$\boldsymbol{K}_1 = 0.5\begin{bmatrix} e^0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Videre er $\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{K}_1 = [0.5, 0]^T$ og

$$\boldsymbol{K}_2 = 0.5\begin{bmatrix} e^0 - 0.5 \\ 0.5 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

Og til slutt

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2) = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$