Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelark og Laplacetabell

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen 73 59 35 23 916 34 712
Niklas Sävström 73 59 35 27

EKSAMEN I MATEMATIKK 4D (TMA4135)

Mandag 10. august 2009
Tid: 15:00 – 19:00 Sensur 31. august 2009

BOKMÅL

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn Laplacetransformen til funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{if} \quad 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & \text{if} \quad 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{if} \quad 2 \leq t. \end{cases}$$

b) Finn den inverse Laplacetransformen til funksjonen

$$G(s) = \frac{se^{-2s}}{(s+1)^3}.$$

Oppgave 2

a) Beregn Fouriercosinusrekka til funksjonen f definert ved,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

b) Finn løsningen av rand- og initialverdiproblemet

(1)	$u_t = u_{xx}$	(den éndimensjonale varmeligningen),
(2)	$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$	for $t \ge 0$,
(3)	$u(x,0) = f(x)$	for $0 < x < 2$,

når det oppgis at alle funksjoner av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (1) og (2) er enten en konstant eller en konstant ganger funksjonen $u_n(x,t) = e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \cos n\frac{\pi}{2}x$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

c) Finn alle løsningene av ligning (1) av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

(4) $$u(0,t) = u_x(2,t) = 0 \qquad \text{for } t \ge 0.$$

Oppgave 3 Bruk Fouriertransformasjonen til å beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} \, du.$$

Oppgave 4 Gitt funksjonen

$$f(x,y) = x^2 \left(1 + e^{y^3}\right)^2.$$

La $D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0)$ betegne den retningsderiverte av f i punktet (x_0, y_0) bestemt av vektoren $\boldsymbol{u}$. Finn enhetsvektorene $\boldsymbol{u}_+$, $\boldsymbol{u}_-$ og $\boldsymbol{u}_0$ slik at

$$D_{\boldsymbol{u}_+} f(1,1) \text{ er størst mulig}, \quad D_{\boldsymbol{u}_-} f(1,1) \text{ er minst mulig} \quad \text{og} \quad D_{\boldsymbol{u}_0} f(1,1) = 0.$$

Oppgave 5

a) Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_2, \\
y_2' &= y_1,
\end{aligned} \tag{5}
$$

med initialbetingelsen

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Finn en tilnærming til løsningen av systemet (5) $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$, når $t = 0.2$, ved bruk av den implisitte trapesmetoden, gitt av

$$\boldsymbol{y}^{(i+1)} = \boldsymbol{y}^{(i)} + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{y}^{(i)}) + \boldsymbol{f}(t_{i+1}, \boldsymbol{y}^{(i+1)})\right], \quad t_i = t_0 + ih. \tag{6}$$

Bruk $h = 0.2$, dvs $\boldsymbol{y}^{(1)} \approx \boldsymbol{y}(0.2)$.

b) Vis at for systemet (5), med de gitte initialbetingelsene, er

$$\|\boldsymbol{y}(t)\|_2 = 1, \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

hvor $\|\boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Dvs. lengden $\|\boldsymbol{y}\|_2$ er konstant lik en.

c) Vis at

$$\|\boldsymbol{y}^{(i+1)}\|_2 = \|\boldsymbol{y}^{(i)}\|_2, \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \ldots,$$

der $\boldsymbol{y}^{(i)}$ er gitt av trapesmetoden (6) andvendt på ligningssystemet (5). Dvs. trapesmetoden bevarer lengden, $\|\boldsymbol{y}^{(i)}\|_2$.
Hint:

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 + h^2}\begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6 Gitt ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x' &= \mathrm{e}^y - x, \\
y' &= x + y,
\end{aligned}
$$

med initialbetingelsen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Bruk Heuns metode til å finne en tilnrming til $x(t),\ y(t)$, nr $t = 0.5$. Bruk $h = 0.5$.