Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Thaule mobil 952 14 508

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Bokmål
Mandag 20. desember 2010
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i datasettet

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	3	$0{,}5$	-1	$-1{,}5$

.

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y = \begin{cases} 2\sin 2t & \text{for } 0 \le t < \pi, \\ 0 & \text{for } t > \pi, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Hint: Du kan benytte at $\sin\omega t * \sin\omega t = \frac{1}{2\omega}\big(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\big)$, (i betydningen $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$).

Oppgave 3 Gitt funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + e^{2xy}).$$

La $D_{\mathbf{a}}f(1,1)$ betegne den retningsderiverte til f i punktet $(1,1)$ bestemt av vektoren $\mathbf{a}$. Finn alle enhetsvektorer $\mathbf{e}$ slik at $D_{\mathbf{e}}f(1,1) = 0$.

Oppgave 4 La en 2π-periodisk funksjon f bli gitt ved $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$.

a) Skissér grafen til den 2π-periodiske utvidelsen til f, og finn dens komplekse Fourier-rekke.

b) Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Oppgave 5 Løs integralligningen

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Oppgave 6

a) Gitt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredstiller randbetingelsene

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0.$$

b) Finn den løsningen av problemet i oppgave **a)** som i tillegg tilfredstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = (\cos x + 1)^2, \quad 0 < x < \pi.$$

Oppgave 7 Gitt et system av første ordens differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Vi har sett på flere mulige måter å løse slike ligninger numerisk, i denne oppgaven velger vi «trapes-metoden», gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\big[\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})\big] \qquad (*)$$

der h er skrittlengden og $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at $\mathbf{y}_n$ er kjent, og $(*)$ brukes til å finne en tilnærmelse til $\mathbf{y}_{n+1}$. Metoden er implisitt, siden funksjonen $\mathbf{f}$ også beregnes i den ukjente løsningen $\mathbf{y}_{n+1}$. Vi ender altså med et ikke-lineært ligningssystem som må løses med hensyn på $\mathbf{y}_{n+1}$ for hvert skritt.

La $y = y(x)$ være funksjonen som tilfredstiller den andre ordens differensialligningen

$$y'' = \sin y,$$

med startbetingelser $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = 0$.

Skriv om ligningen til et system av første ordens differensialligninger. Hva blir startverdiene for dette systemet?

Sett $h = 0{,}1$ og sett opp det ikke-linære ligningssystemet du får når du ønsker å utføre det første skrittet med trapesmetoden for dette systemet.

Oppgave 8 Gjør en iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 20x_1 - x_2 - 10\pi &= 0, \\ \sin x_1 - 20x_2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $x_1^{(0)} = \frac{\pi}{2}$ og $x_2^{(0)} = 0$ som startverdier for iterasjonene.

Oppgave 9 Gitt den partielle differensialligningen

$$\begin{aligned} u_t &= \kappa u_{xx} + x(1-x), && (t > 0, \quad 0 < x < 1), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, && (t > 0), \\ u(x,0) &= \sin \pi x, && (0 < x < 1). \end{aligned}$$

Bruk et gitter bestående av punktene $t_j = jk$ og $x_i = ih$, $h = \frac{1}{N}$, og sett opp et eksplisitt differanseskjema for denne ligningen, det vil si, bruk sentraldifferanser for å approksimere u_{xx} og en foroverdifferanse for å approksimere u_t.

La $\kappa = 0{,}1$. Sett $h = 0{,}25$ og $k = 0{,}2$, og finn tilnærmelser til $u(0{,}25,\ 0{,}2)$, $u(0{,}5,\ 0{,}2)$ og $u(0{,}75,\ 0{,}2)$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi:}\quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ \text{Gauss–Seidel:}\quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1-\cos aw}{w} \right)$
$u(x) e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} - i \frac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x \rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2+a^2}$