Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelark og tabeller

Faglig kontakt under eksamen:
Yurii Lyuibarskii 73 59 35 26 916 47 362
Eldar Straume 73 59 66 83 994 10 389

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Mandag 9. august 2010
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur 30. august 2010.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

I denne oppgaven er a og b positive konstanter.

a) Finn den inverse Laplacetransformen til funksjonen

$$e^{-as}\frac{1}{(s-b)^2}$$

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = \delta(t-2), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 2

Funksjonen $f(x)$ er definert ved at $f(x) = x$ for $0 < x < \pi$, den er odde og periodisk med periode 2π. I tillegg har den "middelverdiegenskapen" hvilket betyr at $f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+0) + f(x-0)\Big)$ for alle x.

a) Tegn grafen til $f(x)$ for $-2\pi \leq x \leq 3\pi$. Hva er verdien $f(3\pi)$?

b) Bestem Fourierrekken til f, og bruk resultatet til å finne summen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

Oppgave 3

a) Finn alle funksjoner på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som tilfredsstiller betingelsene

$$\text{(I)} \qquad u_{xx} + 4u_{yy} = 0 \qquad \text{for} \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 2, \quad \text{og}$$

$$\text{(II)} \qquad u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad \text{for} \qquad 0 \leq y \leq 2.$$

b) Finn funksjonen $u(x,y)$ som i tillegg til (I) og (II) også tilfredsstiller

$$\text{(III)} \qquad u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u(x,2) = x(\pi - x) \qquad \text{for} \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Det oppgis at

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \text{for} \qquad 0 \leq x \leq \pi,$$

der

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} & \text{for} \quad n \quad \text{odde,} \\ 0 & \text{for} \quad n \quad \text{like.} \end{cases}$$

Du kan godt uttrykke svaret ved hjelp av b_n.

Oppgave 4

Vi oppgir følgende Fouriertransform:

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

Bruk dette til å finne verdiene av

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \cos w \, dw \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sin w \, dw.$$

Oppgave 5

La R være det triangulære området i xy-planet bestemt av ulikhetene $0 < x < 1$ og $0 < y < 1 - x$, dvs det triangulære området med hjørner i $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$. Vi skal løse følgende partielle differensialligning med randbetingelser i området R:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - 16u(x,y) = 16(x+y) \quad \text{for alle} \quad (x,y) \in R,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1-x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Bruk gitteret bestemt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, med $h = 0.25$. La $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$ og bruk 5-punkts approksimasjonen for $u_{xx} + u_{yy}$ til å sette opp et ligningssystem for de tre ukjente verdiene $X = U_{1,1}$, $Y = U_{2,1}$ og $Z = U_{1,2}$ i det indre av området.

Oppgave 6

Utfør en iterasjon med Gauss-Seidels metode på ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

med startverdiene $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

Vi skriver de 3 ligningene i motsatt rekkefølge slik at vi ender opp med systemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Igjen, utfør en iterasjon med Gauss-Seidels metode med de samme startverdiene som før.
Hvilken løsning er den mest nøyaktige?

Oppgave 7

Bruk Newtons dividerte differansers metode til å finne polynomet av grad høyst 4 som interpolerer datasettet

x	-1	1	2	3	5
f(x)	-7	-1	-4	-3	35

.