Løsningsførslag i Matematikk 4D, 4N, 4M

Oppgave 1 (Kun før 4D) Vi har

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{x^2-y^2},$$

for $x^2 \neq y^2$. Dette gir

$$\nabla f = \frac{6xy}{(x^2-y^2)^2}[-y,x].$$

For $(x,y) = (2,1)$ er altså

$$\nabla f = \frac{4}{3}[-1,2].$$

Enhetsvektoren i retningen bestemt av $\overline{v}$ er

$$\overline{u} = \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1],$$

og dermed er $Df = \nabla f \cdot \overline{u} = 2\sqrt{2}/3$.

Størst mulig verdi for $Df = \nabla f \cdot \overline{u}$ er når $\overline{u}$ peker samme vei som ∇f. Da er maksimal $Df = \nabla f \cdot \overline{u} = |\nabla f|$. For $(x,y) = (2,1)$ er følgelig maksimal rettningsderivert

$$|\nabla f| = \frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

Oppgave 2 (Oppgave 2 før 4D, Oppgave 1 før 4N)

a) (i) Ligningen kan uttrykkes via konvolusjonsproduktet som

$$y(t) + 3e^t * y(t) - 2te^t = 0$$

Vi anvender Laplace -transformen på ligningen. Her er $L(e^t) = \frac{1}{s-1}$, og s-skifte formelen anvendt på funksjonen t gir $L(te^t) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Vi får ligningen

$$Y(s) + \frac{3}{s-1}Y(s) - \frac{2}{(s-1)^2} = 0$$

og løser denne med hensyn på Y og får

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s+2)} = \frac{2}{3}(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2})$$

Det gir

$$y(t) = \frac{2}{3}(e^t - e^{-2t})$$

(ii) Ligningen kan skrives som

$$z(t) - (t^n) * (t^m) = 0$$

og Laplace-transformasjonen av denne er

$$Z(s) - \frac{n!}{s^{n+1}}\frac{m!}{s^{m+1}} = 0$$

Derfor er

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{n!m!}{s^{n+m+2}} = \frac{(n+m+1)!}{s^{n+m+2}}\frac{n!m!}{(n+m+1)!} \\ z(t) &= \frac{n!m!}{(n+m+1)!}t^{n+m+1} \end{aligned}$$

b) I denne oppgaven bruker vi at $L(\delta(t)) = 1$, og vi merker oss at $\delta(t-a) = \delta(t-a)u(t-a)$ og derfor gir formelen for t-skifte

$$L(\delta(t-a)) = e^{-as}$$

Anvendes Laplace-transformen på differensialligningen, med initialbetingelsene $y(0) = y'(0) = 0$, så får en følgende algebraiske ligning for $Y(s)$

$$s^2Y(s) - 6sY(s) + 9Y(s) = e^{-s} - e^{-2s}$$

Derfor er

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s-3)^2} - \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2}$$

Her må en benytte både s-skifte og t-skifte formlene for å finne $y(t)$. s-skifte gir at

$$L(te^{3t}) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

og t-skifte gir videre for $a > 0$

$$L((t-a)e^{3(t-a)}u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{(s-3)^2}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} y(t) &= (t-1)e^{3(t-1)}u(t-1) - (t-2)e^{3(t-2)}u(t-2) \\ &= \begin{cases} 0, \quad t < 1 \\ (t-1)e^{3(t-1)}, \quad 1 < t < 2 \\ (t-1)e^{3(t-1)} - (t-2)e^{3(t-2)}, \quad t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Oppgave 3 (Oppgave 3 før 4D, Oppgave 2 før 4N, Oppgave 1 før 4M) The transform is given by

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\omega)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}1/(a-i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}.$$

The Fourier inversion formula gives at $x=-1$, for $a=1$

$$e^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+i\omega)(\cos\omega - i\sin\omega)}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos\omega+\omega\sin\omega)}{1+\omega^2}d\omega$$

Similarly, for $x=1$ we obtain

$$0 = f(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+i\omega)(\cos\omega + i\sin\omega)}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos\omega-\omega\sin\omega)}{1+\omega^2}d\omega$$

Hence, if the two integrals are I_1 and I_2 we have $I_1 = I_2$ and $I_1 + I_2 = 2\pi e^{-1}$, and thus

$$I_1 = I_2 = \pi e^{-1}.$$

Oppgave 4 (Oppgave 4 før 4D, Oppgave 3 før 4N, Oppgave 2 før 4M)

a) Fourier-sinus rekka finner en ved å utvide $g(x)$ til en odde funksjon $\tilde{g}(x)$ på intervallet $[-\pi,\pi]$ og deretter bestemme Fourier-rekka til $\tilde{g}(x)$. Vi får da

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 1,\ x\in(0,\pi] \\ -1,\ x\in[-\pi,0) \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{-2}{n\pi}\cos(nx)|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi},\ \text{n odde} \\ 0,\ \text{n jevn} \end{cases}$$

Derfor er Fourier-sinus rekka til g(x) gitt ved

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\text{n odde}}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

Videre er, ifølge Parsevals identitet,

$$2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(x)^2dx = \sum b_n^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

b) Vi ser på bølgeligningen $u_{tt} = 4u_{xx}$ med rand-og initialbetinglser

$$(i) \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$(ii) \quad u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 1$$

og benytter som vanlig separasjon av variable som først gir oss alle løsninger på forma $u(x,t) = F(x)G(t)$. Det gir

$$F(x)G''(t) = 4F''(x)G(t)$$
$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{4G(t)} = k \text{ (konstant)}$$

eller

$$(1)\ F''(x) = kF(x), \quad (2)\ G''(t) = 4kG(t)$$

La oss først bestemme de løsningene av disse differensialligningene som er slik at $u = F(x)G(t)$ oppfyller randbetingelsen (i). Vi må ha da

$$F(0) = F(\pi) = 0$$

og differensialligningen (1) må ha $k = -\lambda^2 < 0 \ \ (\lambda > 0)$.Løsningen må være på forma

$$F(x) = \sin(\lambda x), \text{ med } \sin(\lambda\pi) = 0$$

Det gir $\lambda = 1, 2, 3, ..., n, ..,$og vi setter $F_n(x) = \sin(nx)$.

Dernest løser vi differensialligningen (2) for $G(t)$, med $k = -n^2$, som gir løsningene

$$G_n(t) = A_n \cos(2nt) + B_n \sin(2nt)$$

Initialbetingelsen (ii) gir at $G_n(0) = 0$, $G'_n(0) = 1$, derav $A_n = 0$. Vi prøver derfor å finne en løsning på forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)\sin(2nt)$$

Den siste initialbetingelsen $u_t(x,0) = 1$ gir da

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin(nx)\cos(2nt)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin(nx)$$

som forteller oss at rekka på høyre side må være Fourier-sinus rekka til den konstante funksjonen 1 på intervallet $[0,\pi]$, nemlig funksjonen $g(x)$ i punkt a). Følgelig må

$$2nB_n = b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{n odde} \\ 0, & \text{n jevn} \end{cases}$$
$$B_n = \frac{b_n}{2n} = \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi}, & \text{n odde} \\ 0, & \text{n jevn} \end{cases}$$

Endelig løsning er

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ odde}} \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sin(2nt)$$

c) De tidsuavhengige løsningene $u(x,t) = v(x)$ av ligningen $u_{tt} + 8 = 4u_{xx}$ får en ved å ignorere leddet u_{tt}. Da må $v(x)$ være en løsning av ligningen $v''(x) = 2$, dvs.

$v(x) = x^2 + bx + c$. Med randbetingelsen $v(0) = v(\pi) = 0$ blir da

$$v(x) = x(x - \pi)$$

Merk at ligningen $u_{tt} + 8 = 4u_{xx}$ er inhomogen, og $v(x)$ er en (partikulær) løsning av denne. Ved å fjerne konstantleddet 8 får en den tilhørende homogene ligningen $u_{tt} = 4u_{xx}$. La nå $w(x,t)$ være den løsningen av denne ligningen som vi fant i punkt b), og sett

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + v(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ odde}} \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sin(2nt) + x(x - \pi) \end{aligned}$$

Siden $w(x,t)$ tilfredsstiller betingelsene i punkt b), er det nå enkelt å sjekke at funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller betingelsene (i), (ii) gitt i punkt c) i oppgaven.

Oppgave 5 (Oppgave 5 før 4D, Oppgave 4 før 4N, Oppgave 3 før 4M)

a) The system becomes $y' = z$, $z' = \cos(xy) + x^2$. Let $F(y,z,x)^T = (z, \cos(xy) + x^2)$. Heun's method is then

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + hF(z_n, y_n, x_n) = \begin{pmatrix} y_n + hz_n \\ z_n + h(\cos(x_n y_n) + x_n^2 \end{pmatrix}.$$

and

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left(F(y_n, z_n, x_n) + F(\tilde{y}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}, x_{n+1}) \right).$$

b) Taking $h = 0.1$ and $x_0 = 0$ we obtain

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left(\; 2 + 2\cos(0.1 \times 1.2) + 0.1^2 \; \right) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1.001 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.02 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 6 (Oppgave 6 før 4D,Oppgave 5 før 4N, Oppgave 4 før 4M) With F as the two expression we have $F(\pi/2, 0) = (0, \pi - 3)$ and

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x - x\sin x & \cos^2 y - \sin^2 y \\ 2\sin x + 2x\cos x & \cos y - y\sin y \end{pmatrix}$$

so that

$$J(\pi/2, 0) = \begin{pmatrix} -\pi/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

If we invert this we obtain

$$J^{-1}(\pi/2, 0) = \frac{1}{\pi/2 + 2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & \pi/2 \end{pmatrix}$$

Therefore the next iteration (x_1, y_1) is given by

$$(x_1, y_1) = (\pi/2, 0) - J^{-1}(0, \pi - 3)^T = \left(\frac{1}{2}(\pi^2 + 12)/(\pi + 4), -\pi(\pi - 3)/(\pi + 4)\right) \approx (1.5311, -0.0623).$$

Oppgave 7 (Oppgave 5 før 4M)

a) Runge Kuttas 4th order method. The output is an approximation of $y(b)$ with intial value $y(a) = ya$, where y is a solution on (a, b). The output would be 0.4010.

b) Since the method is fourth order we have $y \approx y_n + C/n^4$. Hence we obtain $y - y_{n=2} \approx 1/15 \times (0.4010 - 0.3969) \approx 0.0003$.

c) We obtain that $y_n = (1 - h)^n y_0$ which goes to zero with n iff $|1 - h| < 1$, and since $h > 0$ this implies $h < 2$.